MODULE 1
L'optimisation

CORRIGÉ, p. 4

Préparation

1. a) $(8, 29)$

b) $\left(\frac{4}{3}, \frac{22}{3}\right)$

c) $(16, 60)$

2. a) $y \leq 4x - 7$

b) $y < {}^{-}2x + 5$

3. a) x : le nombre de milligrammes de lipides.

y : le nombre de milligrammes de glucides.

$x \geq 3y$

b) x : le nombre d'heures que Cédric consacre à ses devoirs.

y : le nombre d'heures que la sœur de Cédric consacre à ses devoirs.

$x + y \geq 12$

c) x : le salaire horaire pour le 1er emploi.

y : le salaire horaire pour le 2e emploi.

$12{,}5x + 9{,}75y \geq 246$

CORRIGÉ, p. 5

Activité 1

1er temps

a) – La longueur de la surface doit mesurer au moins le double de sa largeur.

– 80 mètres de clôture sont disponibles.

– Au moins 42 mètres de clôture doivent être utilisés.

– La surface est rectangulaire.

Oui, certaines informations sont implicites, soit les contraintes de non-négativité (la longueur et la largeur du rectangle doivent être supérieures à 0).

b) $x \geq 2y$

$2x + 2y \leq 80$

$2x + 2y \geq 42$

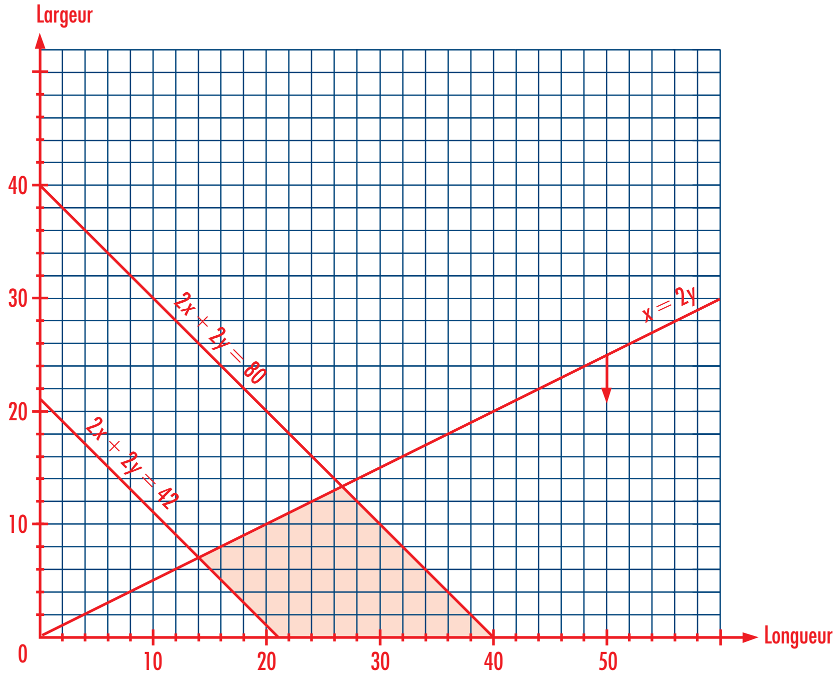
$x > 0$

$y > 0$

2e temps

c) Les 2e et 3e inéquations peuvent avoir été réduites à : $x + y \leq 40$
$x + y \geq 21$

d)



CORRIGÉ, p. 5 (*suite*)

Il est possible de valider chacune des représentations en choisissant un point (x, y) dans la région-solution et en remplaçant x et y dans l'inéquation. L'inégalité obtenue devrait être vraie.

3e temps

e) Pour représenter graphiquement les inéquations, il faut isoler le y dans l'inéquation afin d'obtenir l'équation canonique de la droite associée à la contrainte.

CORRIGÉ, p. 6

Activité 2

1er temps

a) x : le nombre d'heures travaillées à la piscine.

y : le nombre d'heures travaillées au club vidéo.

$x + y \leq 20$

$x \geq 3$

$x \leq 14$

$y \geq 8$

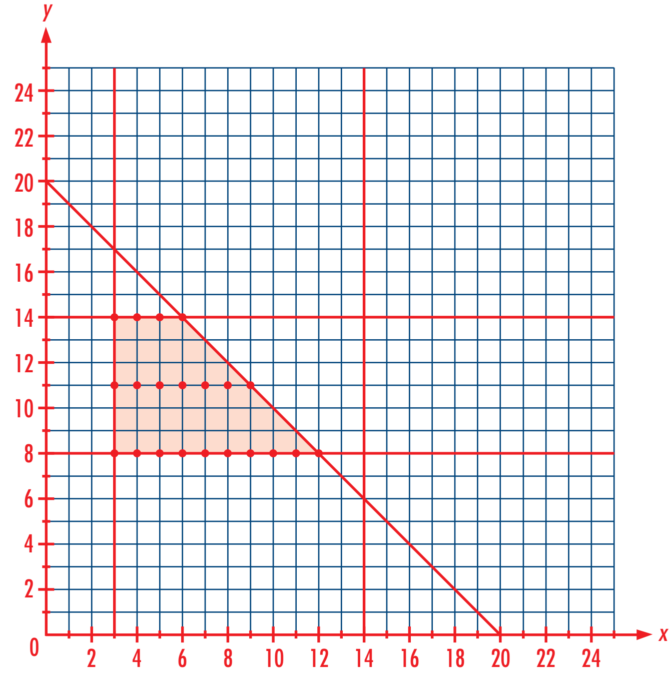
$y \leq 14$

2e temps

b) Il existe plusieurs réponses dont (3, 8), (3, 10), (6, 12) et (10, 10).

Les coordonnées des points doivent être des nombres entiers positifs.

c)



Les 21 points représentés sont les solutions du système d'inéquations.

Les points situés à l'extérieur du quadrilatère ne respectent pas, au minimum, une des inéquations.

3^e temps

d) 1) Catherine peut travailler un minimum de 11 heures par semaine (3 heures de cours de natation et 8 heures au club vidéo).

2) Catherine peut travailler un maximum de 20 heures par semaine.
Il y a trois possibilités (tous les points dont les coordonnées sont des nombres entiers situés sur le côté du polygone associé à la droite ayant pour équation : $x + y = 20$) :
6 heures de cours de natation et 14 heures au club vidéo ;
9 heures de cours de natation et 11 heures au club vidéo ;
12 heures de cours de natation et 8 heures au club vidéo.

3) Revenu minimal : 99,50 $
En effet, si Catherine travaille 3 heures à la piscine et 8 heures au club vidéo : $3 \times 10{,}50\,\$ + 8 \times 8{,}50\,\$ = 99{,}50\,\$$
Revenu maximal : 194 $
En effet, si Catherine travaille 12 heures à la piscine et 8 heures au club vidéo : $12 \times 10{,}50\,\$ + 8 \times 8{,}50\,\$ = 194\,\$$

CORRIGÉ, p. 7

Activité 3

1^{er} temps

a) x : le nombre de litres du liquide 1.
y : le nombre de litres du liquide 2.

$x \geq 5000$
$y \geq 2000$
$x \leq 60\,000$
$y \leq 20\,000$
$x \geq 2y$
$x + y \leq 50\,000$

2^e temps

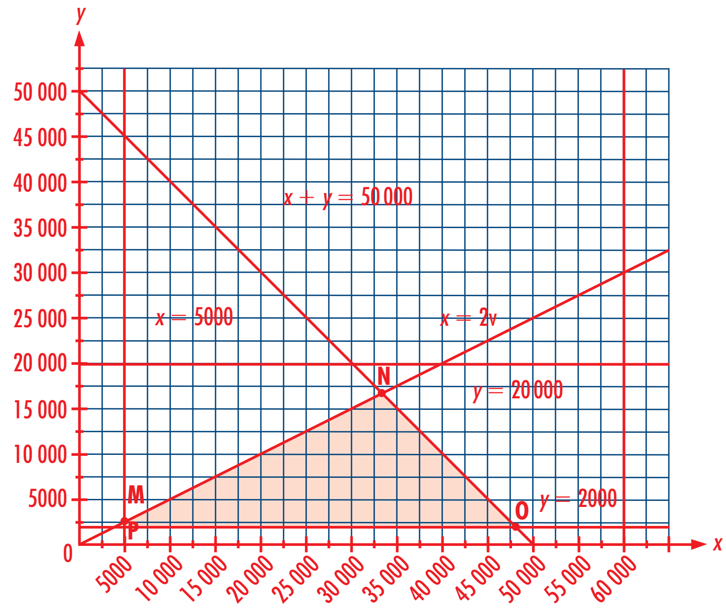
b) (5000, 2000), (20 000, 5000), (34 000, 8000), (45 000, 3000)

Les nombres doivent être des nombres positifs.

$x \geq 0$
$y \geq 0$

CORRIGÉ, p. 7 (*suite*)

c)



La région obtenue est un quadrilatère.

La forme obtenue varie d'une situation à l'autre et dépend du nombre de contraintes.

Le nombre de côtés du polygone est inférieur ou égal au nombre de contraintes. En effet, certaines situations, comme celle-ci, peuvent présenter une ou des contraintes superflues.

CORRIGÉ, p. 8

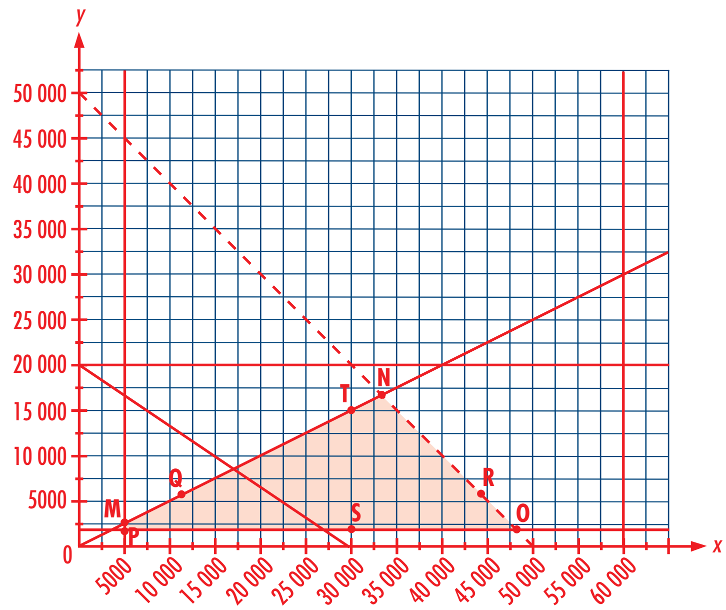
Activité 3 (*suite*)

3[e] temps

d) 1) [12 000, 44 000] litres.

Le minimum (12 000 litres) se trouve sur la droite dont l'équation est $x = 2y$ et est représenté par le point **Q** dans le graphique ci-dessous.

Le maximum (44 000 litres) se trouve sur la droite dont l'équation est $x + y = 50\,000$ et est représenté par le point **R** dans le graphique ci-dessous.



2) [2000, 15 000] litres.

Le minimum (2000 litres) se trouve sur la droite dont l'équation est $y = 2000$ et est représenté par le point **S** dans le graphique ci-dessus.

Le maximum (15 000 litres) se trouve sur la droite dont l'équation est $x = 2y$ et est représenté par le point **T** dans le graphique ci-dessus.

CORRIGÉ, p. 8 (*suite*)

3) Liquide 1 : 48 000 litres.
Liquide 2 : $16\,666,\bar{6}$ litres.

Pour déterminer la quantité maximale du liquide 1, il faut trouver le point du quadrilatère qui est situé à l'extrême droite, c'est-à-dire le point dont la valeur de l'abscisse est la plus élevée.

Pour déterminer la quantité maximale du liquide 2, il faut trouver le point du quadrilatère qui est situé à l'extrémité supérieure, c'est-à-dire le point dont la valeur de l'ordonnée est la plus élevée.

e) Non, les quantités notées à la 3e semaine ne respectent pas l'inéquation $x \geq 2y$ et les quantités notées à la 6e et à la 7e semaines ne respectent pas l'inéquation $x + y \leq 50\,000$.

CORRIGÉ, p. 9

Activité 4

1er temps

a) $8x + 2y \leq 880$

$4x + 0,25y \leq 320$

$x \geq 20$

$x \leq 80$

$y \geq 100$

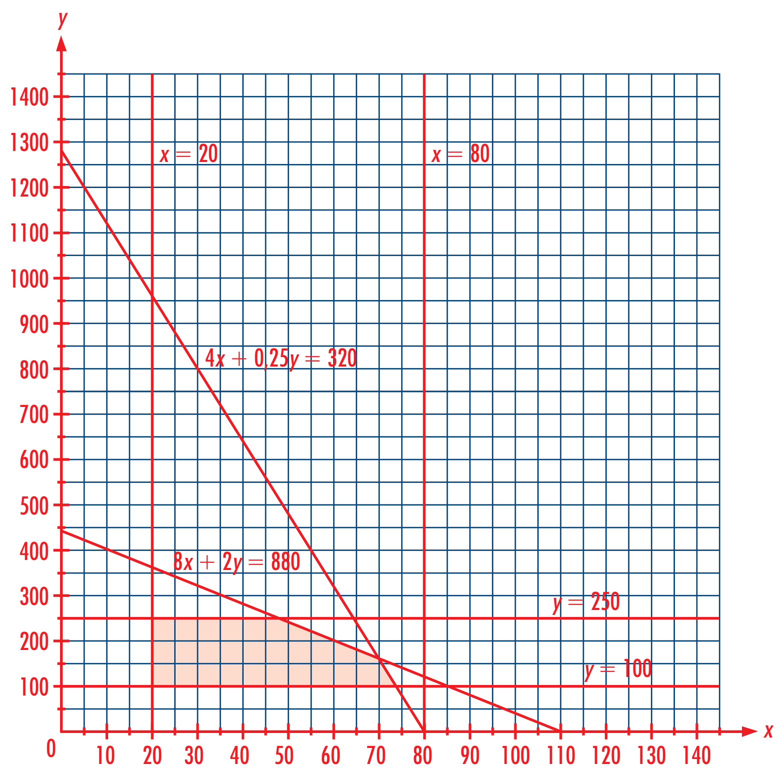
$y \leq 250$

2e temps

b) x : le nombre de foulards produits par semaine.

y : le nombre de chandails produits par semaine.

c)



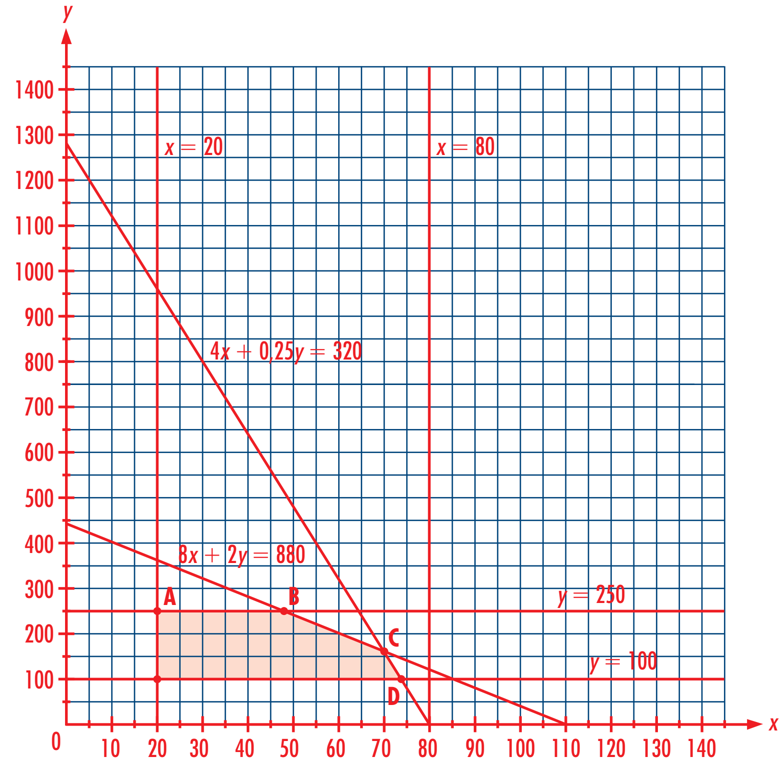
Tous les points du polygone de contraintes respectent toutes les contraintes données, c'est-à-dire qu'ils vérifient toutes les inéquations.

3e temps

d) **1)** $P = 20x + 4y$

2) La compagnie devra vendre 70 foulards et 160 chandails pour maximiser ses profits (voir le point **C** dans le graphique ci-dessous).

$P = 20 \cdot 70 + 4 \cdot 160 = 2040\$$



3) La quantité maximale de foulards se chiffre à 73. Puisque le point **D** a comme coordonnées (73,75, 100), il faut arrondir la valeur de l'abscisse au nombre entier inférieur, soit 73.

La quantité maximale de chandails se chiffre à 250 (voir les points **A** et **B** dans le graphique ci-dessus).

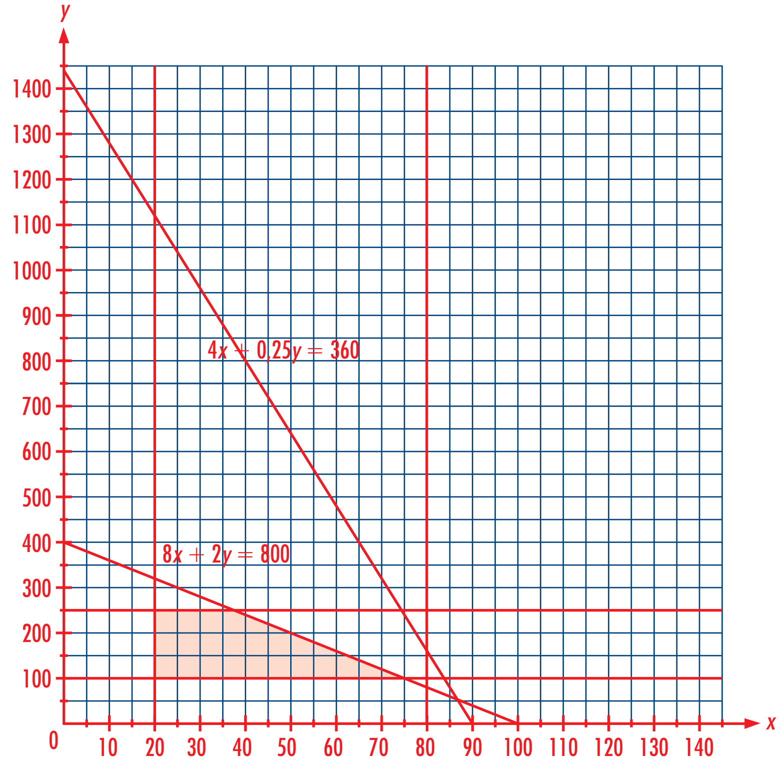
Ces quantités maximales n'ont pas nécessairement un lien avec le profit maximal, puisque celui-ci dépend directement des profits unitaires des foulards et chandails vendus. En effet, la vente d'un foulard rapporte cinq fois plus que celle d'un chandail.

4) Voici les possibilités de répartition, le système d'inéquations, le graphique obtenu, les coordonnées des sommets pouvant maximiser le profit et le profit maximal.

- Si on a 20 personnes à la préparation et 9 personnes à l'impression.

  Système d'inéquations :

  $8x + 2y \leq 800$
  $4x + 0,25y \leq 360$
  $x \geq 20$
  $x \leq 80$
  $y \geq 100$
  $y \leq 250$



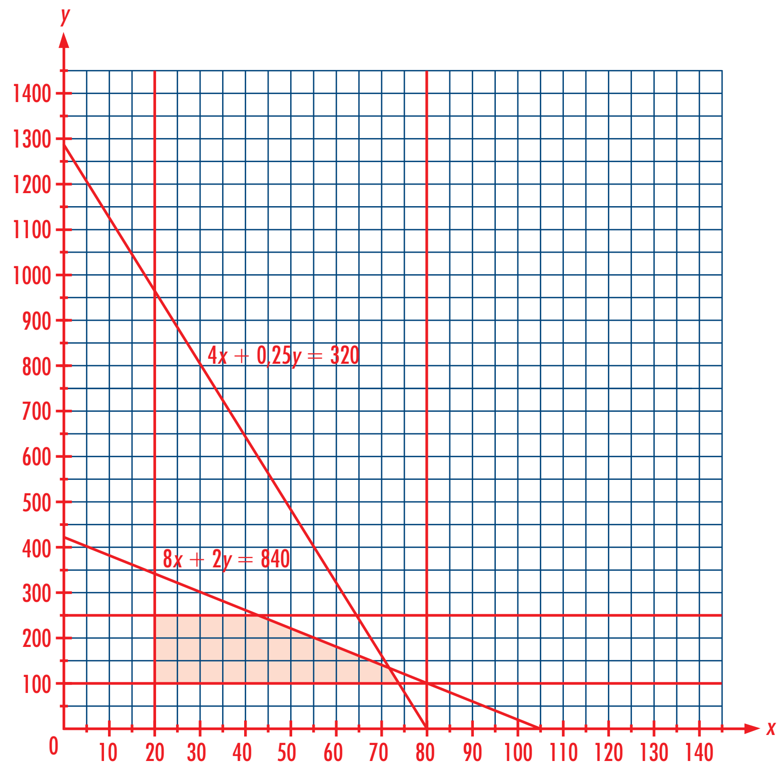
Sommets : (37,5, 250) et (75, 100)

Profit maximum = 1900 $ (correspond au sommet (75, 100))

- Si on a 21 personnes à la préparation et 8 personnes à l'impression.

Système d'inéquations :

$8x + 2y \leq 840$
$4x + 0{,}25y \leq 320$
$x \geq 20$
$x \leq 80$
$y \geq 100$
$y \leq 250$



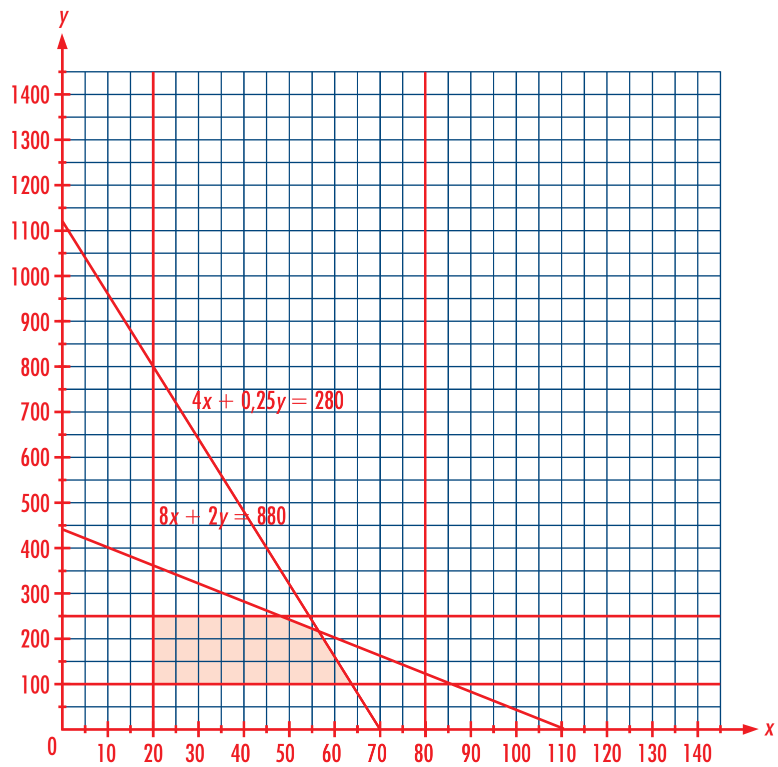
Sommets : (42,5, 250), ($71,\bar{6}$, $133,\bar{3}$) et (73,75, 100)

Profit maximum $=$ 1952 $ (correspond au point (71, 133), soit le plus près du sommet)

- Si on a 22 personnes à la préparation et 7 personnes à l'impression.

Système d'inéquations :

$8x + 2y \leq 880$
$4x + 0,25y \leq 280$
$x \geq 20$
$x \leq 80$
$y \geq 100$
$y \leq 250$



Sommets : (47,5, 250), ($56,\bar{6}$, $213,\bar{3}$) et (63,75, 100)

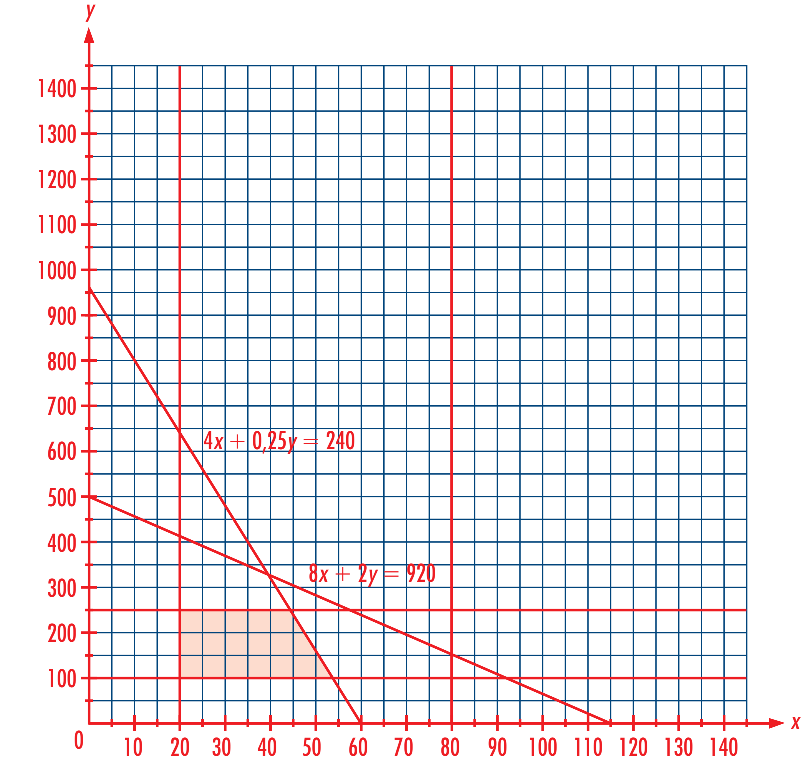
Profit maximum $=$ 1972 $ (correspond au point (56, 213), soit le plus près du sommet)

- Si on a 23 personnes à la préparation et 6 personnes à l'impression.

Système d'inéquations :

$8x + 2y \leq 920$
$4x + 0,25y \leq 240$
$x \geq 20$
$x \leq 80$
$y \geq 100$
$y \leq 250$

CORRIGÉ, p. 9 (*suite*)



Sommets : (44,375, 250) et (53,75, 100)

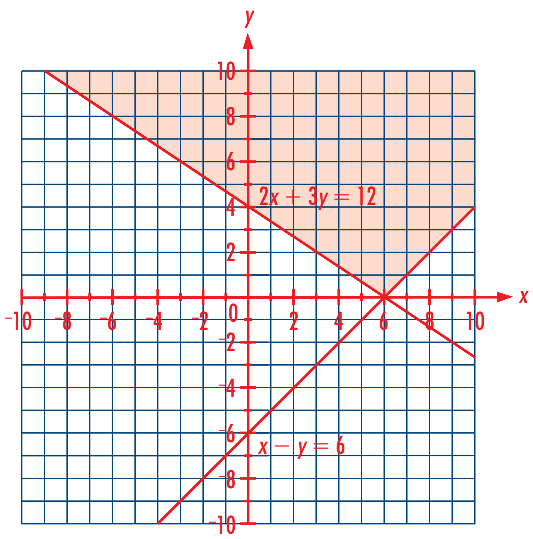
Profit maximum = 1880 $ (correspond au point (44, 250), soit le plus près du sommet)

Conclusion : La meilleure redistribution serait 22 personnes à la préparation et 7 personnes à l'impression.

CORRIGÉ, p. 14

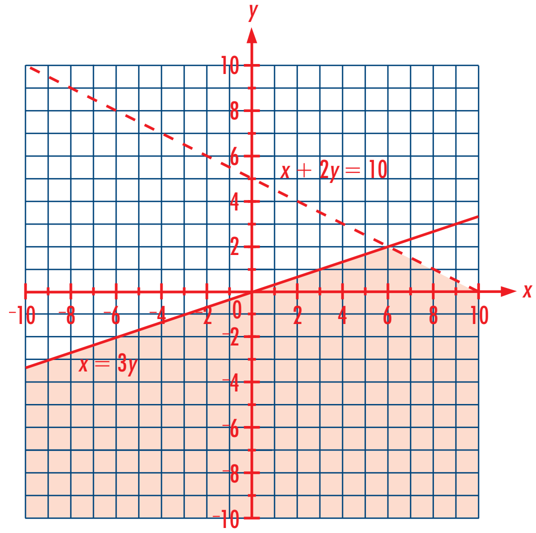
Exercices

1. a)



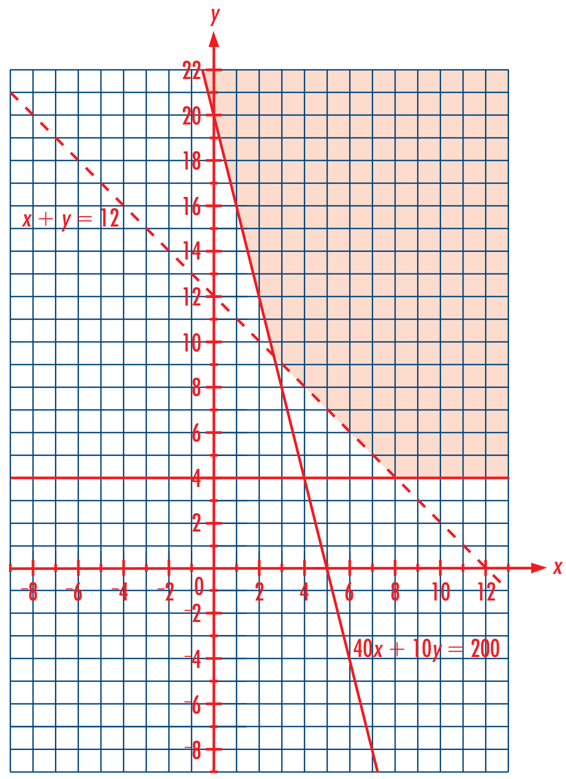
Polygone ouvert.

b)



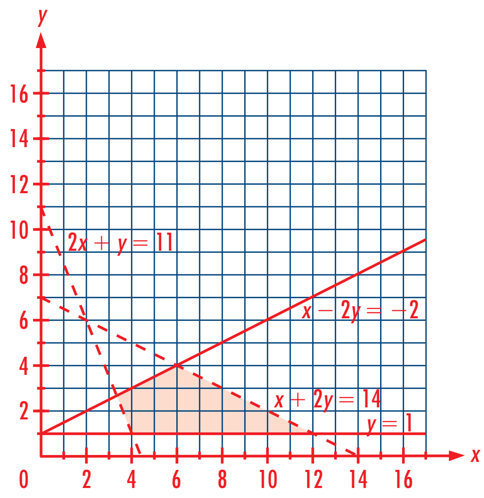
Polygone ouvert.

c)



Polygone ouvert.

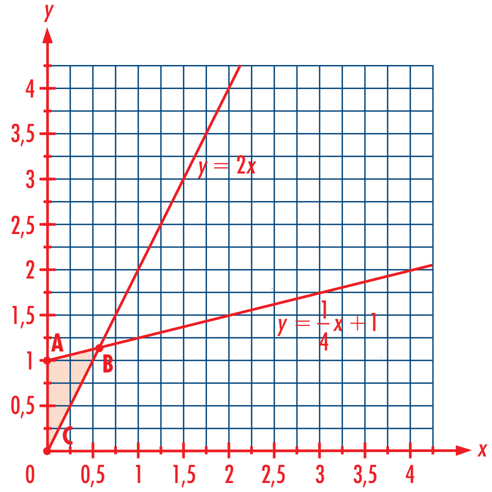
d)



Polygone fermé.

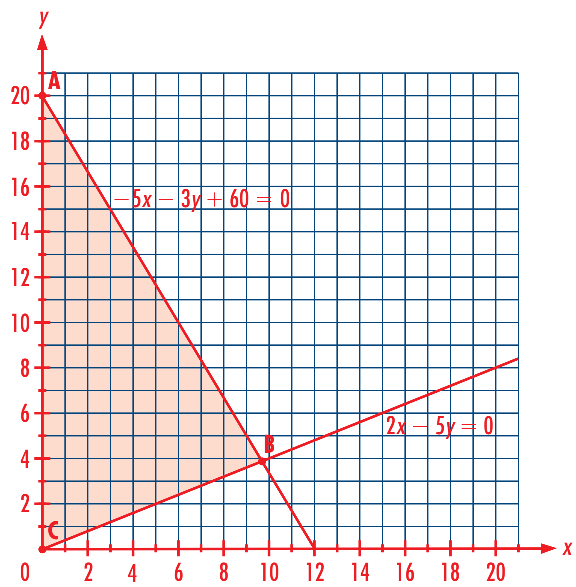
CORRIGÉ, p. 14 (*suite*)

2. a)



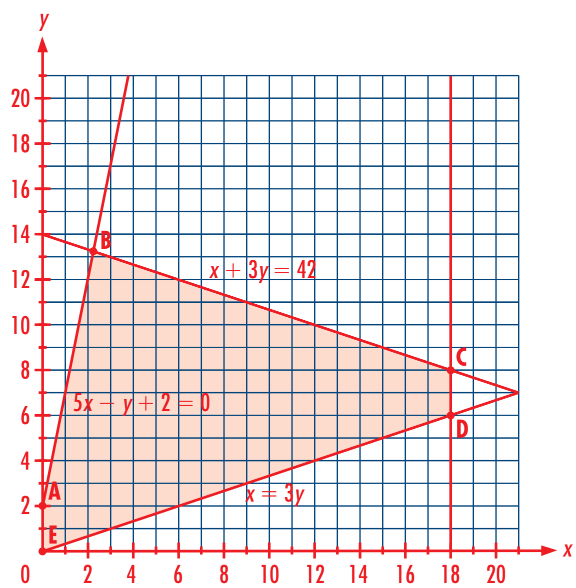
A (1, 0), **B**$\left(\frac{4}{7}, \frac{8}{7}\right)$, **C** (0, 0)

b)



A (0, 20), **B**$\left(\frac{300}{31}, \frac{120}{31}\right)$, **C** (0, 0)

c)



A(2, 0), **B**$\left(\frac{9}{4}, \frac{53}{4}\right)$, **C**(18, 8), **D**(18, 6), **E**(0, 0)

3. a) x : la longueur du rectangle.

y : la largeur du rectangle.

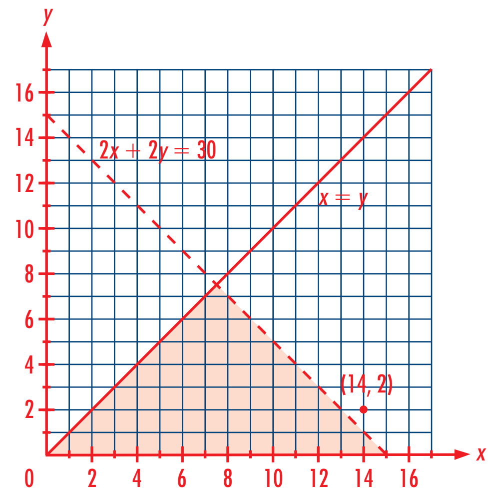
$x \geq y$

$2x + 2y < 30$

$x \geq 0$

$y \geq 0$

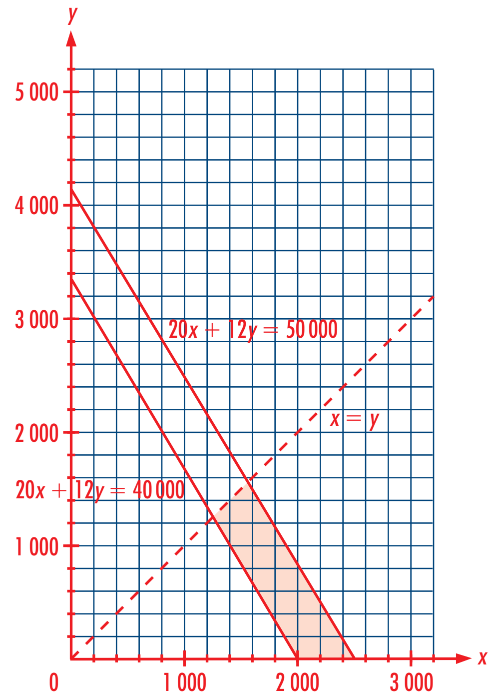
b)



c) Non, car le périmètre dépasserait 30 mètres. Ce point est situé à l'extérieur du polygone de contraintes.

4. a) x : le nombre de femmes qui se sont fait couper les cheveux.

y : le nombre d'hommes qui se sont fait couper les cheveux.



b) Cinq possibilités : (2000, 0), (1500, 1000), (2500, 0), (2400, 100) et (1850, 250)

c) Pour chacun des exemples donnés, les montants d'argent amassés sont, respectivement, les suivants : 40 000 \$, 42 000 \$, 50 000 \$, 49 200 \$ et 40 000 \$.

CORRIGÉ, p. 15

Exercices (*suite*)

5. a) $Z_1 = 1400\ \$$

$Z_2 = 3625\ \$$

$Z_3 = 4500\ \$$

$Z_4 = 200\ \$$

b) Pour la fonction Z_1 :

coût minimal : aucun garçon et 20 filles.

coût maximal : 35 garçons et 35 filles.

Pour la fonction Z_2 :

coût minimal : 45 garçons et 25 filles.

coût maximal : 10 garçons et 10 filles.

Pour la fonction Z_3 :

coût minimal : 55 garçons et 10 filles.

coût maximal : 20 garçons et 45 filles.

Pour la fonction Z_4 :

coût minimal : 15 garçons et 25 filles.

coût maximal : 45 garçons et aucune fille.

c) Faux.

d) Faux.

CORRIGÉ, p. 16

Exercices (*suite*)

6. a)

1) x : le nombre de poulets.
y : le nombre de dindes.

2) $x + y \leq 50$
$x \leq 3y$
$x \geq 60$
$y \geq 0$

3) $Z = 0{,}65x + 0{,}8y$

b)

1) x : le nombre de revues.
y : le nombre de journaux.

2) $x + y = 450$
$x \leq 3y$
$x \leq 200$

3) $Z = 5{,}25x + 1{,}5y$

c)

1) x : le nombre de pots de miel de trèfle.
y : le nombre de pots de fleurs sauvages.

2) $x \geq 20$
$x + y \leq 35$
$y < 2x$
$y \geq 0$

3) $Z = 6x + 5y$

CORRIGÉ, p. 16 (*suite*)

7. Le nombre de jours d'utilisation de l'*Eurailpass* ne dépassera pas le double de ceux sans l'utiliser.

$y \leq 2x$

Le voyage d'Hubert durera entre 9 et 24 jours.

$x + y \geq 9$

$x + y \leq 24$

Le nombre de jours sans utiliser l'*Eurailpass* sera inférieur ou égal à 20 jours.

$x \leq 20$

CORRIGÉ, p. 17

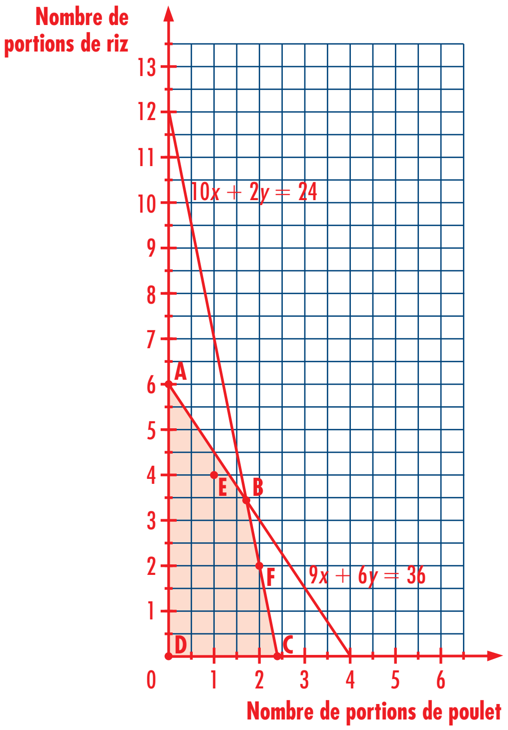
Exercices (*suite*)

8. a) Il existe une infinité de possibilités, dont :

(4, 2), (2, 4), (3, 1) et (6, 2).

b) Le temps maximal d'utilisation est de 8 heures pour le tracteur et de 10 heures pour la tondeuse.

9. a)



b) L'élève pourra manger jusqu'à 4 portions de riz.

Le point **E**, dans le polygone de contraintes, montre le nombre maximal de portions de riz que l'élève peut manger s'il prend 1 portion de poulet.

c) L'élève pourra manger jusqu'à 2 portions de riz.

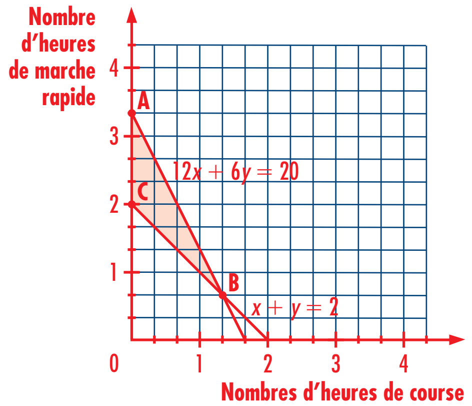
Le point **F**, dans le polygone de contraintes, montre le nombre maximal de portions de riz que l'élève peut manger s'il prend 2 portions de poulet.

d) Non. Bien que la quantité de sel recommandée soit respectée, ce n'est pas le cas pour la quantité de gras. En effet, aucun point du polygone de contraintes n'a une valeur d'abscisse égale à 3.

e) Non. Bien que la quantité de sel recommandée soit respectée, ce n'est pas le cas pour la quantité de gras. En effet, le point dont les coordonnées sont (3, 2) est situé à l'extérieur du polygone de contraintes.

CORRIGÉ, p. 17 (*suite*)

10. a)



b) Martine a pu marcher durant une période variant entre 1 h et 1 h 20.

c) Martine a pu marcher durant un maximum de 2 h 20. Elle aura alors parcouru 20 km.

d) 1 h 20

CORRIGÉ, p. 18

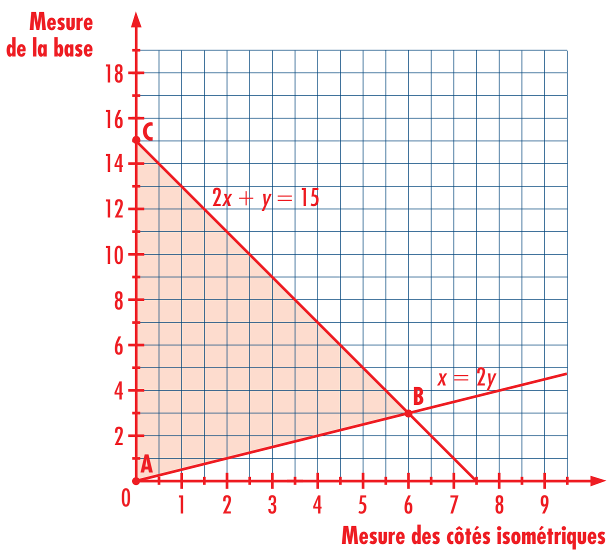
Exercices (*suite*)

11. a) x : la mesure d'un des côtés isométriques.

y : la mesure de la base.

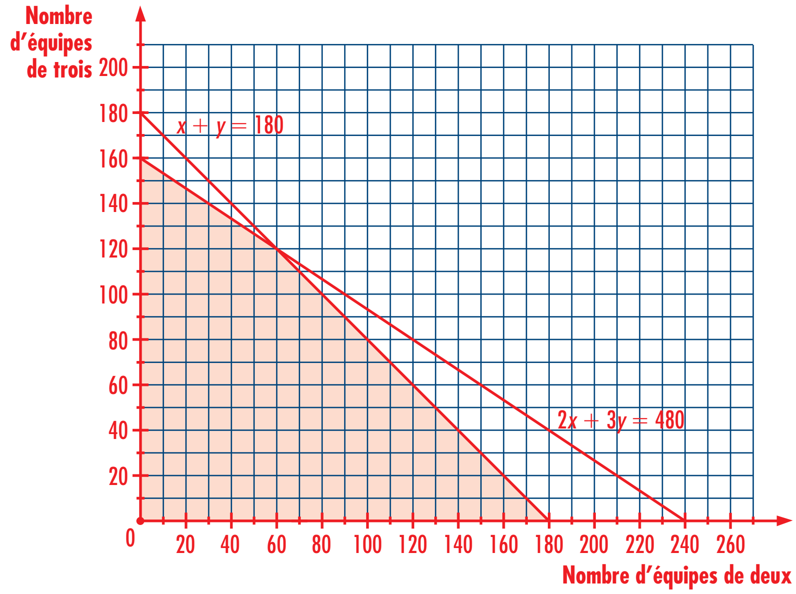
$x \leq 2y$

$2x + y \leq 15$



b) La mesure maximale que peuvent avoir les côtés isométriques est de 6 cm, puisque celle-ci correspond à l'abscisse du point le plus à droite dans le polygone de contraintes.

12. a)

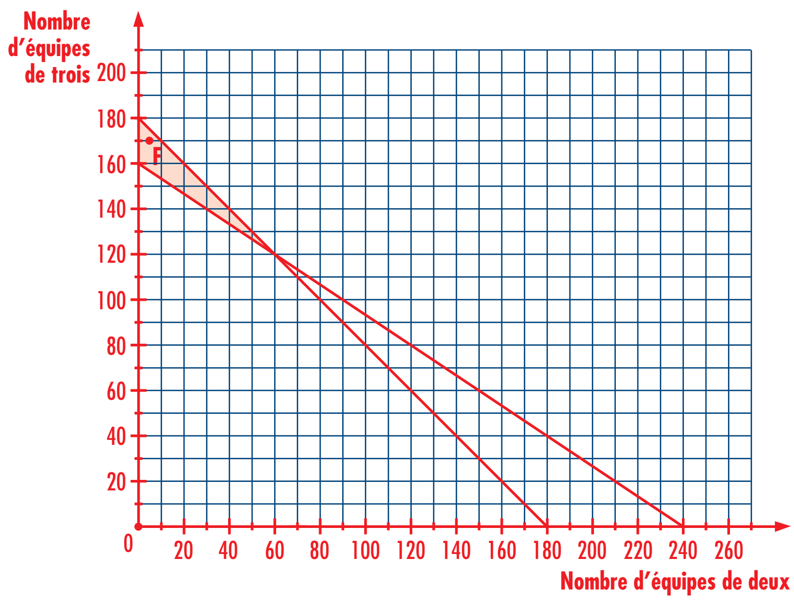


CORRIGÉ, p. 18 (*suite*)

b) Oui, puisque le point (140, 40) est situé sur un des côtés du polygone de contraintes.

Ce point respecte l'inéquation associée à la contrainte du nombre de camions, soit $x + y \leq 180$, ainsi que celle du nombre d'employés, soit $2x + 3y \leq 480$.

c) La contrainte associée au nombre d'employés disponibles ne serait pas respectée. En effet, avec 5 équipes de deux employés et 170 équipes de trois employés, on obtient un total de 520 employés. Le point **F**(5, 170) est situé dans le triangle illustré ci-dessous.



d) $Z = 5x + 10y$

Consolidation

1. a) Variables :

x : le nombre de membres.

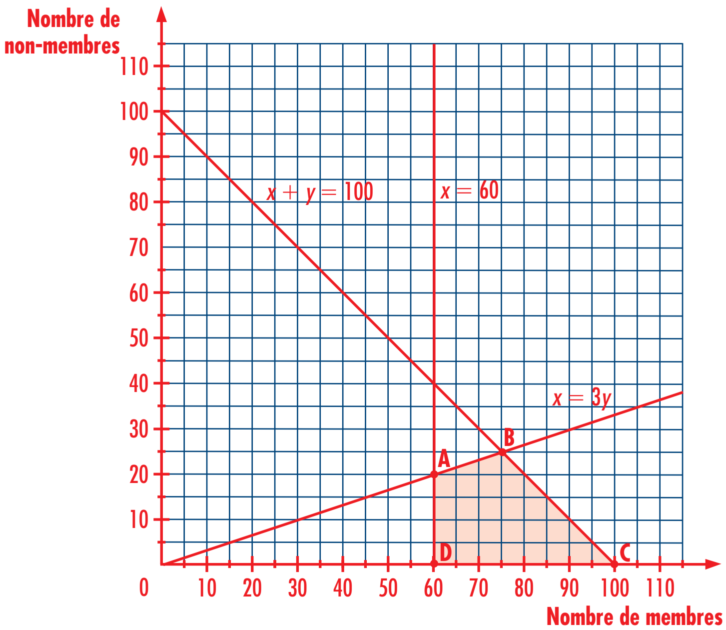
y : le nombre de non-membres.

Système d'inéquations :

$x \geq 60$
$x + y \leq 100$
$x \geq 3y$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

Fonction à maximiser :

$Z = 5x + 10y$



Le nombre maximal de non-membres peut atteindre 25 (voir le point **B** dans le graphique).

b) La participation des membres engendrera 1,5 fois plus de revenus pour le club que celle des non-membres.

2. Variables :

x : le nombre de postes de réceptionnistes.

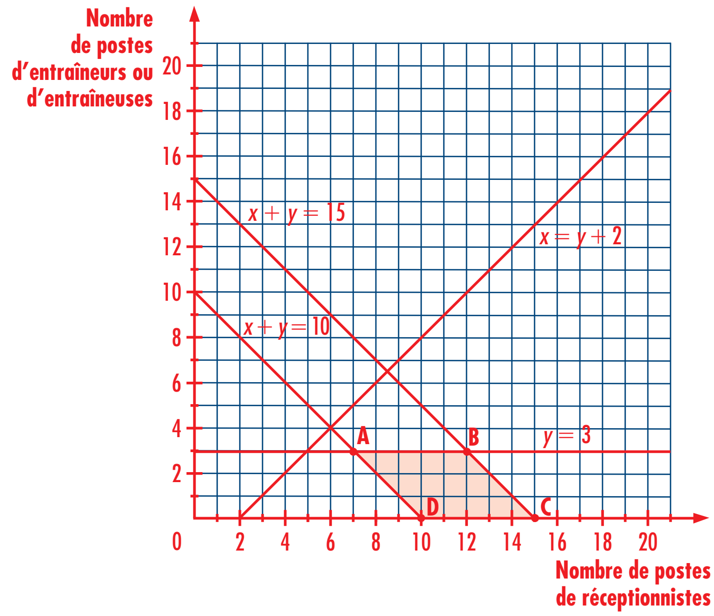
y : le nombre de postes d'entraîneurs ou d'entraîneuses.

Système d'inéquations :

$x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + y \geq 10$
$x + y \leq 15$
$y \leq 3$
$x \geq y + 2$

Fonction à minimiser :

$Z = 700x + 800y$



Pour minimiser les dépenses, il faut embaucher 10 réceptionnistes et aucun entraîneur.

$Z = 700x + 800y$

$Z = 700(10) = 7000\$$

3. Variables :

x : le nombre de pages réservées à la publicité.

y : le nombre de pages réservées aux articles.

Système d'inéquations :

$x \geq 0$

$y \geq 0$

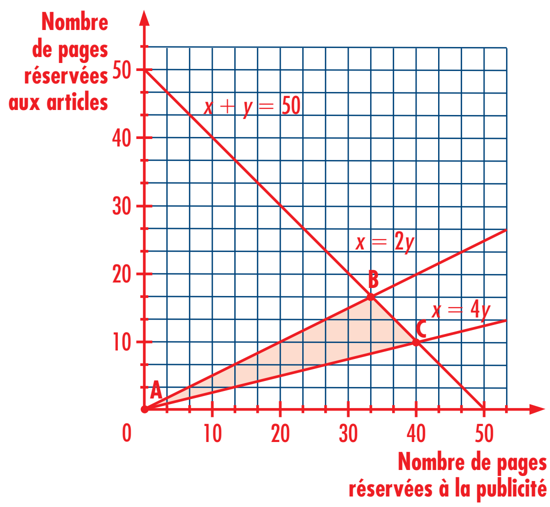
$x + y \leq 50$

$x \geq 2y$

$x \leq 4y$

Fonction à maximiser :

$Z = 1000x - 400y$



La revue devrait comprendre 40 pages de publicité et 10 pages d'articles.

$Z = 1000x - 400y$

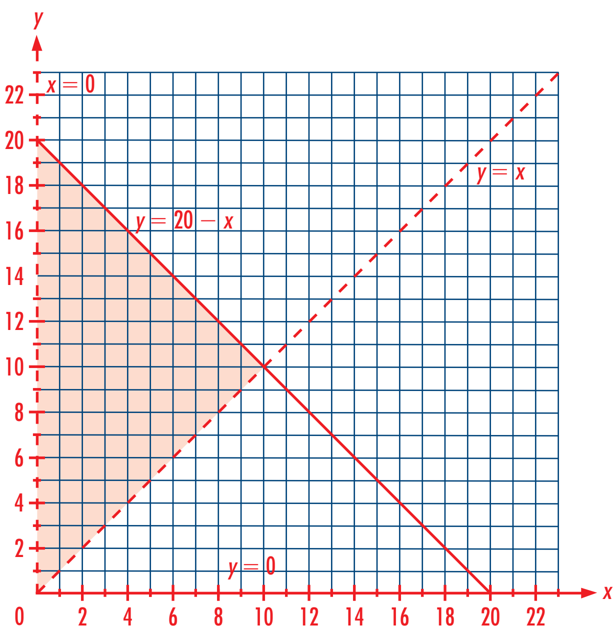
$Z = 1000(40) - 400(10) = 36\,000\$$

Consolidation (*suite*)

4. a) Oui, il est possible que le triangle **ABC** soit isocèle. La mesure du côté $\overline{\mathbf{AB}}$ peut être égale à 15 cm, comme celle du côté $\overline{\mathbf{BC}}$, et celle du côté $\overline{\mathbf{AC}}$ peut être de 5 cm. On a bien $\overline{\mathbf{AB}} > \overline{\mathbf{AC}}$, car $15 > 5$. De plus, ce triangle respecte la contrainte concernant le périmètre, car le périmètre est de 35 cm, soit $15 + 15 + 5$.

x: la mesure du côté $\overline{\mathbf{AC}}$.
y: la mesure du côté $\overline{\mathbf{AB}}$.

Système d'inéquations:
$y > x$
$x + y + 15 \leq 35$
$y > 0$
$x > 0$



b) $0 < m\overline{\mathbf{AC}} < 10$ cm et $0 < m\overline{\mathbf{AB}} < 20$ cm

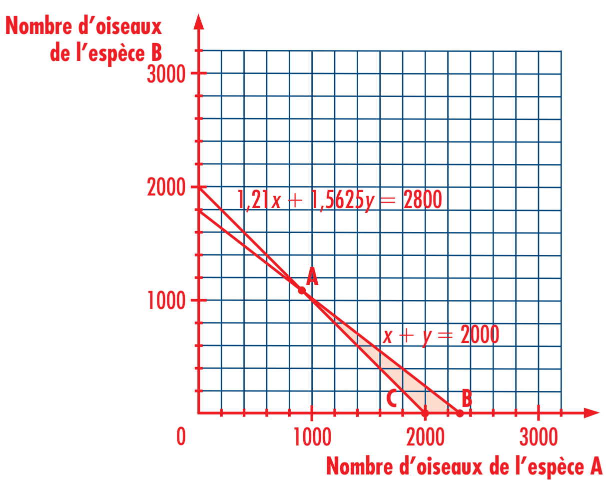
5. Variables:

x: la population d'oiseaux de l'espèce A.

y: la population d'oiseaux de l'espèce B.

Système d'inéquations:

$x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + y \geq 2000$
$1,21x + 1,5625y \leq 2800$
$y \geq 1300$



Selon les données de Martin, il est impossible que le territoire puisse compter plus de 1300 oiseaux de l'espèce B. En effet, le polygone de contraintes ne contient pas de points dont la valeur de l'ordonnée est égale ou supérieure à 1300.

CORRIGÉ, p. 20 (*suite*)

6. Variables :

x : le nombre de machinistes.

y : le nombre de soudeurs ou de soudeuses.

Systèmes d'inéquations :

Situation actuelle :	Proposition des dirigeants :
$x \geq 0$	$x \geq 0$
$y \geq 0$	$y \geq 0$
$x + y \leq 100$	$x + y \leq 200$
$y \leq 1{,}5x$	$y \leq 1{,}5x$
$y + 3x \leq 225$	

Fonction à maximiser :

$Z = 60x + 75y$

Oui, les dirigeants ont raison de penser ainsi, car le profit maximal passerait de 6900 $ à 13 800 $.

CORRIGÉ, p. 21

Consolidation (*suite*)

7. Variables :

x : le nombre de comprimés roses.

y : le nombre de comprimés verts.

Système d'inéquations :

$x \geq 0$

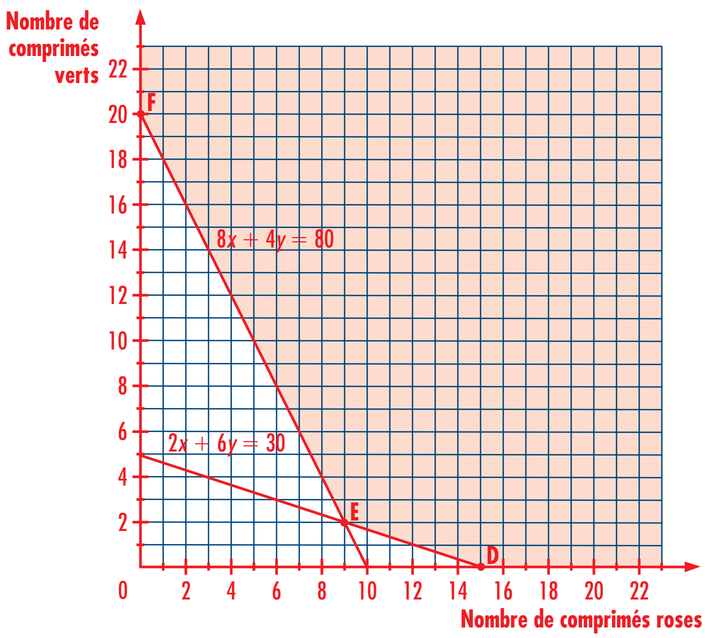
$y \geq 0$

$8x + 4y \geq 80$

$2x + 6y \geq 30$

Fonction à minimiser :

$Z = x + y$



Pour minimiser le nombre de comprimés, il faut prendre 9 comprimés roses et 2 comprimés verts.

8. Variables :

x : le nombre d'hectares d'orge.

y : le nombre d'hectares de tomates.

Système d'inéquations :

$x \geq 0$

$y \geq 0$

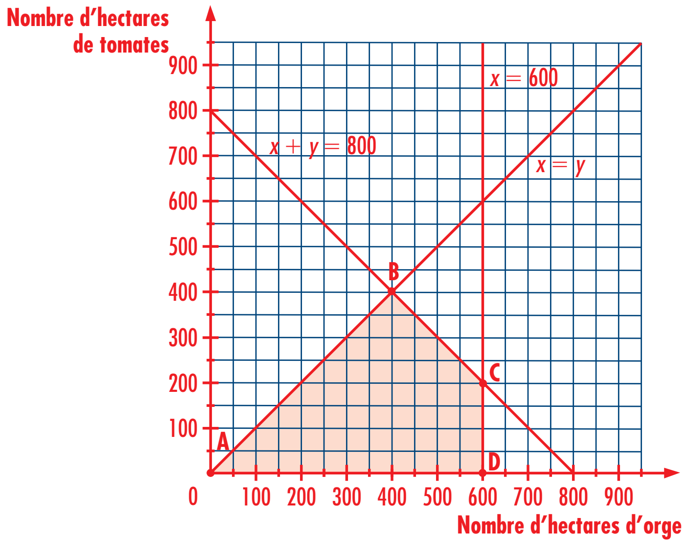
$x \geq y$

$x \leq 600$

$x + y \leq 800$

Fonction à maximiser :

$Z = 800x + 600y$



Le profit maximal est de 600 000 $, soit

$Z = 800x + 600y$

$Z = 800(600) + 600(200) = 600\,000\,\$$

9. On cherche à minimiser les coûts d'achat de sable et de ciment. De plus, on cherche une situation qui offre plusieurs solutions. Par conséquent, la solution doit passer par l'un des côtés du polygone de contraintes. Voici les quatre équations des droites baladeuses possibles (fonction à optimiser), qui passent par chacun des côtés du polygone de contraintes :

droite passant par le côté **AB** : $Z_1 = {}^-2x + y$ $(y = {}^-2x + 2)$;

droite passant par le côté **BC** : $Z_2 = 1{,}25x + y$ $(y = {}^-1{,}25x + 11{,}75)$;

droite passant par le côté **CD** : $Z_3 = {}^-1{,}5x + y$ $(y = {}^-1{,}5x - 7{,}5)$;

droite passant par le côté **AD** : $Z_4 = x + y$ $(y = {}^-x + 20)$.

Ces droites ont toutes la forme suivante : $Z = ax + by$ où Z représente le coût total pour l'achat du sable et du ciment ; a le coût d'un kilo de sable ; b le coût d'un kilo de ciment.

Ainsi, les droites passant par les côtés **AB** et **CD** sont à rejeter puisque le coût du sable serait négatif. Il faut choisir entre les droites passant par **BC** et **AD** pour représenter les différentes possibilités offrant un coût total minimal pour l'achat du sable et du ciment. Sur le graphique, on voit que la droite passant par **BC** offrira un coût total plus bas (11,75 $) que la droite passant par le côté **AD** (20 $).

L'équation de la fonction à optimiser est donc $Z = 1{,}25x + y$.

Les coordonnées de tous les points du côté **BC** offriront des solutions possibles totalisant 11,75 $.

Le coût d'un kilo de sable est de 1 $ et celui d'un kilo de ciment est de 1,25 $.

Consolidation (*suite*)

10. a) Variables :

x : le nombre d'appartements de trois pièces et demie.

y : le nombre d'appartements de quatre pièces et demie.

Système d'inéquations :

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x \leq 20$

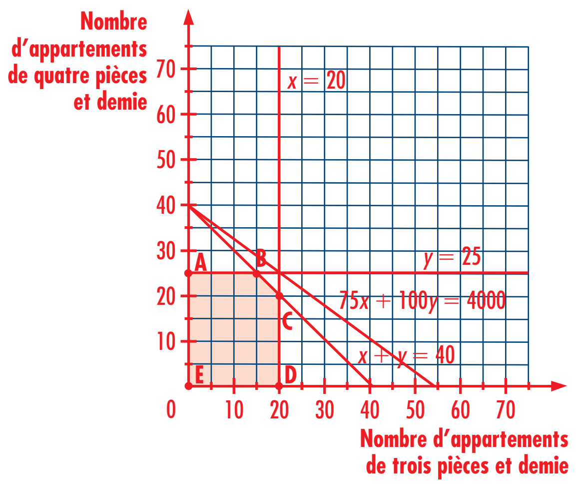
$y \leq 25$

$x + y \leq 40$

$75x + 100y \leq 4000$

Fonction à maximiser :

$Z = 525x + 600y$



Afin de maximiser les revenus de la location (soit 22 875 \$), 15 appartements de trois pièces et demie et 25 appartements de quatre pièces et demie devront être construits.

$Z = 525x + 600y$

$Z = 525(15) + 600(25) = 22\,875\,\$$

b) Le revenu maximal passerait de 22 875 \$ à 18 675 \$; il y aurait donc une baisse de 4200 \$ avec la nouvelle contrainte $x + y \leq 32$.

11. Variables :

x : la somme à emprunter.

y : le montant de ses économies à investir.

Système d'inéquations :

$x \geq 0$

$y \geq 0$

$x + y \leq 31\,000$

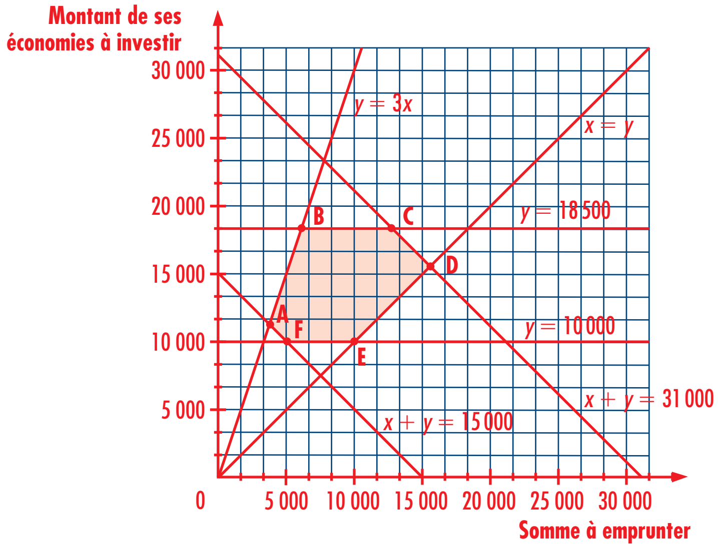
$x + y \geq 15\,000$

$y \leq 18\,500$

$y \geq 10\,000$

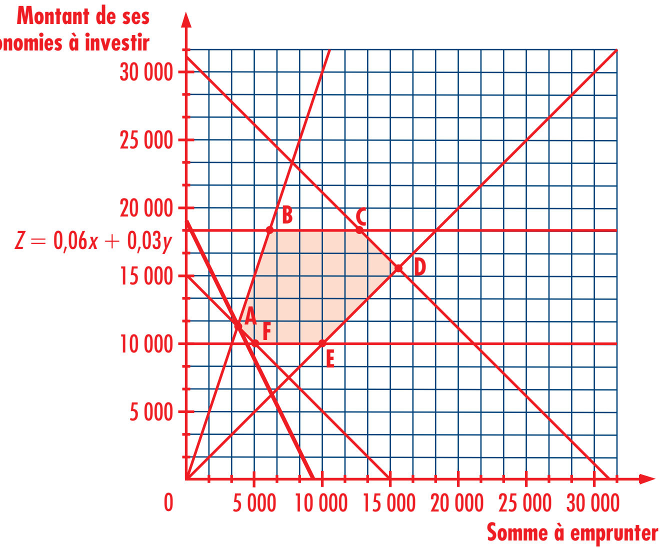
$x \leq y$

$x \geq \frac{y}{3}$



a) La fonction à minimiser est : $Z = 0{,}06x + 0{,}03y$.

Le dernier point touché par la droite baladeuse est le point **A**(3750, 11 250), donc Pierre-Étienne devrait investir 11 250 $ et emprunter 3 750 $.

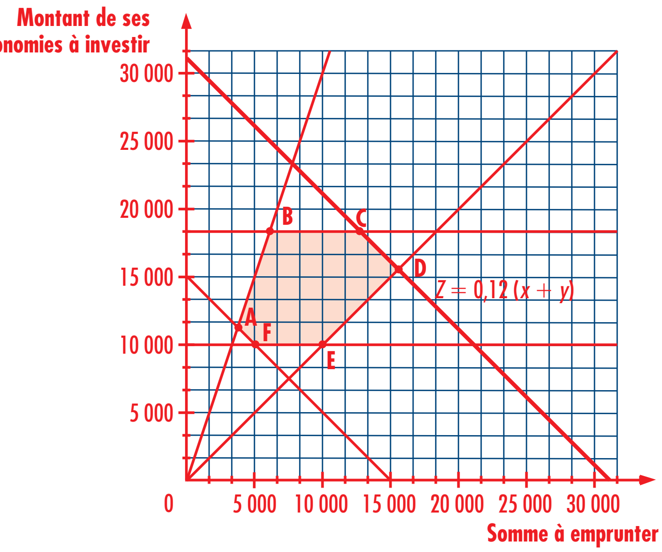


b) Il devrait emprunter entre 12 500 $ et 15 500 $ et investir entre 15 500 $ et 18 500 $.

Son investissement lui rapportera 3720 $ la première année.

La fonction à maximiser est : $Z = 0{,}12(x + y)$.

Il existe plusieurs réponses possibles, soit tous les points situés sur le segment **CD** du polygone de contraintes.



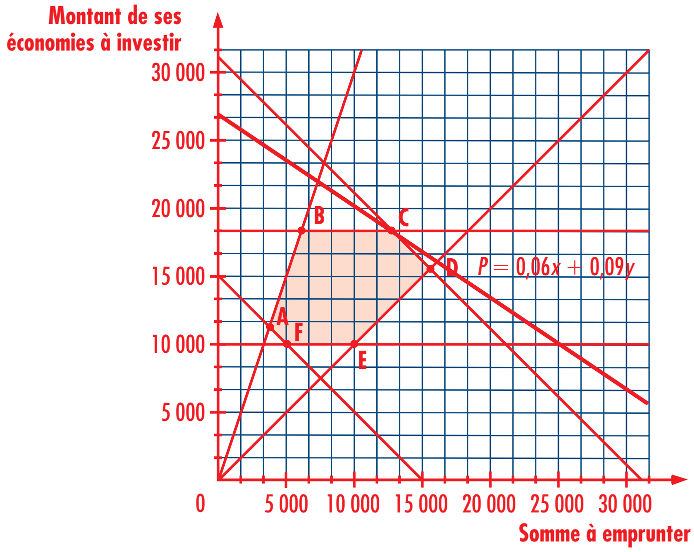
CORRIGÉ, p. 22 (*suite*)

c) La fonction à optimiser se calcule ainsi :

Profits = Revenus − Coûts

$\mathbf{P} = 0{,}12(x + y) - (0{,}06x + 0{,}03y)$

$\mathbf{P} = 0{,}06x + 0{,}09y$



Le dernier point touché par la droite baladeuse est le point **C**(12 500, 18 500), donc Pierre-Étienne devrait investir 18 500 $ et emprunter 12 500 $. Son profit sera de 2415 $ la première année. La solution est unique, car il n'y a qu'un seul sommet qui maximise la fonction profit, soit le sommet **C**, où un seul point du polygone est intercepté par la droite baladeuse.

CORRIGÉ, p. 23

Consolidation (*suite*)

12. Les dimensions du laminage seront de 8 dm par 8 dm.

Variables :

x : la largeur en décimètres.

y : la hauteur en décimètres.

Système d'inéquations :

$x > 0$

$y > 0$

$x \leq 1{,}5y$

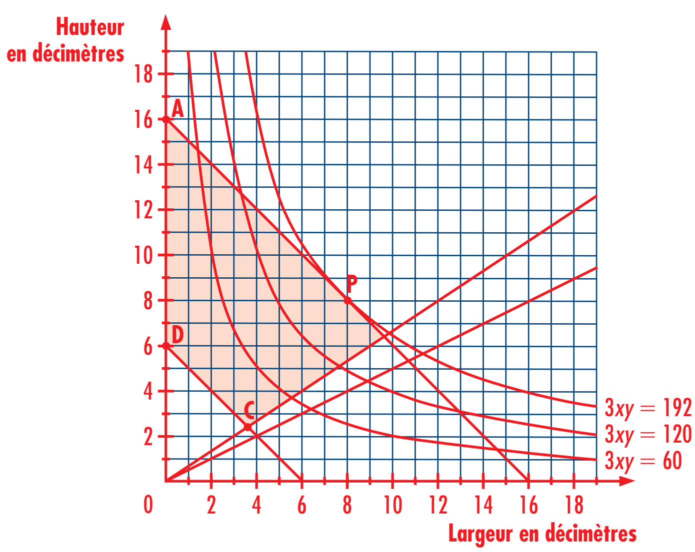
$y \geq \frac{x}{2}$

$2x + 2y \geq 12$

$2x + 2y \leq 32$

Polygone de contraintes :

ABCD



Fonction à maximiser :

$Z = 3xy$

Pour le point **B**(9,6, 6,4), on obtient :

$Z = 3xy$

$Z = 3(9,6)(6,4) = 184,32\$$

La fonction à maximiser n'étant pas linéaire, on doit tracer le graphique pour vérifier s'il y a un autre point du polygone de contraintes qui donne un coût plus élevé. En faisant « balader » la courbe, on cible le point **P**(8, 8). Pour ce point, on obtient :

$Z = 3xy$

$Z = 3 \times 8 \times 8 = 192\$$

Donc, le point **P**(8, 8) maximise le coût.

Défi

13. Soit *x* la mesure de la base du rectangle en mètres et *y* celle de sa hauteur. Les contraintes du problème correspondent aux inégalités :

$x \geq 0,\ y \geq 0,\ xy \geq 1200,\ x^2 + y^2 \leq 125^2.$

La partie ombrée de la figure 1 représente la région du plan cartésien des points (x, y) qui satisfont toutes ces contraintes.

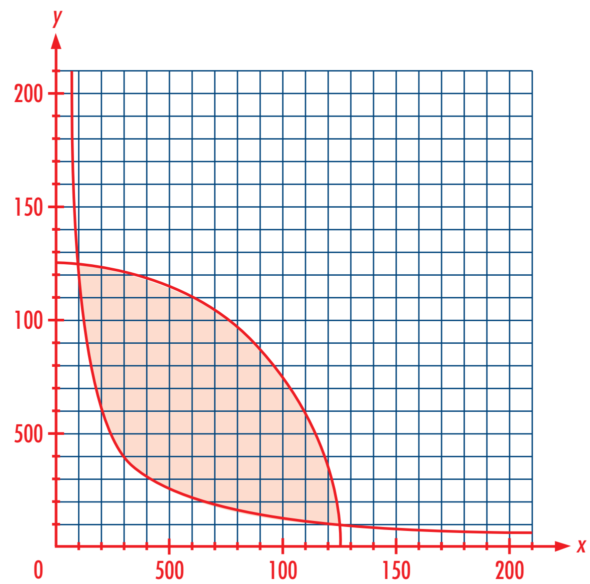


Figure 1

Il faut donc minimiser et maximiser la fonction

$600x + 800y$

lorsque (x, y) parcourt cette région. Considérons la droite baladeuse d'équation

$600x + 800y = c$, c'est-à-dire $y = \frac{c}{800} - \frac{3}{4}x$.

Le coût minimal, *p*, correspond à la valeur de *c* pour laquelle il y a intersection entre cette droite baladeuse et l'hyperbole $y = \frac{1200}{x}$ en seulement un point (plutôt qu'en deux, voir figure 2). Pour déterminer cette valeur de *c*, deux approches sont possibles.

CORRIGÉ, p. 23 (*suite*)

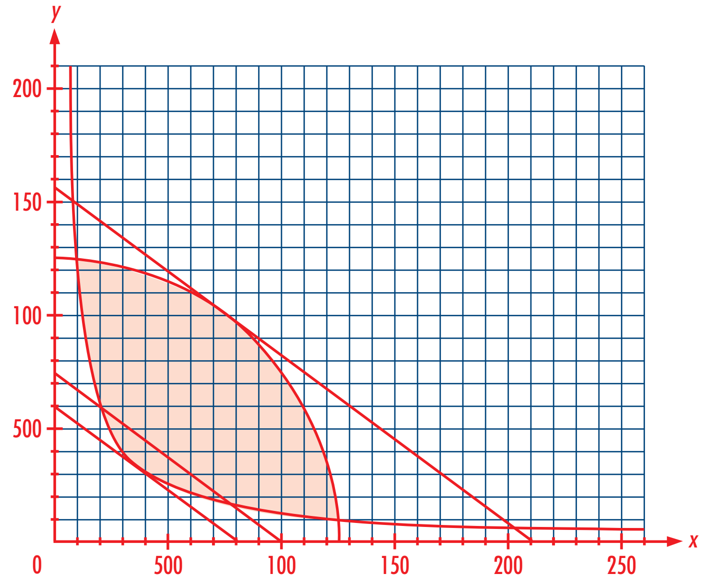


Figure 2

La première consiste à utiliser un outil technologique ; en procédant par essais et erreurs (en utilisant au besoin la fonction zoom), on obtient alors $c = p = 48\,000$, $x = 40$, $y = 30$.

La deuxième approche est algébrique : il faut trouver une valeur de c telle que la droite baladeuse coupe la portion de l'hyperbole en un seul point plutôt qu'en deux (voir figure 2). En d'autres termes, l'équation

$\frac{1200}{x} = \frac{c}{800} - \frac{3}{4}x$, c'est-à-dire $x^2 - \frac{c}{600}x + 1600 = 0$,

doit posséder une seule solution plutôt que deux. En résolvant l'équation quadratique, on trouve les solutions

$x_1 = \frac{c}{1200} + \frac{1}{1200}\sqrt{c^2 - 2\,304\,000\,000}$, $x_2 = \frac{c}{1200} - \frac{1}{1200}\sqrt{c^2 - 2\,304\,000\,000}$.

Ces deux solutions seront confondues en une seule, appelons-la x_0, si la quantité sous le radical est nulle, c'est-à-dire si $c^2 - 2\,304\,000\,000 = 0$.

En résolvant pour *c*, on obtient

$c = \sqrt{2\,304\,000\,000}$, soit $c = 48\,000$.

On en déduit que

$x_0 = \frac{c}{1200} = \frac{48\,000}{1200} = 40$.

On trouve donc $x_0 = 40$, $p = c = 48\,000$ et l'ordonnée y_0 du point d'intersection est

$y_0 = \frac{1200}{x_0} = 30$.

Le coût maximal, **P**, correspond à la valeur de *c* pour laquelle la droite baladeuse est tangente au cercle de rayon 125 dont l'équation est $x^2 + y^2 = 125^2$ (voir figure 2), en raison de la relation de Pythagore. Encore une fois, pour déterminer cette valeur de *c*, deux approches sont possibles.

La première consiste à utiliser un outil technologique ; en procédant par essais et erreurs (en utilisant au besoin la fonction zoom), on obtient alors $c = P = 125\,000$, $x = 75$, $y = 100$.

La deuxième approche est géométrique. Soit **O** l'origine des axes, il faut trouver un point **Q**(*x*,*y*) du cercle faisant en sorte que le rayon **OQ** soit perpendiculaire à la droite baladeuse d'équation

$y = \frac{c}{800} - \frac{3}{4}x$.

Comme la pente de la droite baladeuse est $^{-}\frac{3}{4}$ et que le produit des pentes de deux droites perpendiculaires est $^{-}1$, on en déduit que la pente de la droite passant par **OQ** est $\frac{4}{3}$ et que cette droite a pour équation

$y = \frac{4}{3}x$.

CORRIGÉ, p. 23 (*suite*)

Les coordonnées du point **Q** sont donc données en résolvant le système

$y = \frac{4}{3}x,\ x^2 + y^2 = 125^2.$

Après calcul, on obtient $x = 75,\ y = 100$. En substituant ces valeurs dans l'équation de la droite baladeuse,

on a $100 = \frac{c}{800} - \frac{3}{4} \cdot 75,$

c'est-à-dire $c = P = 125\,000$.

En résumé,

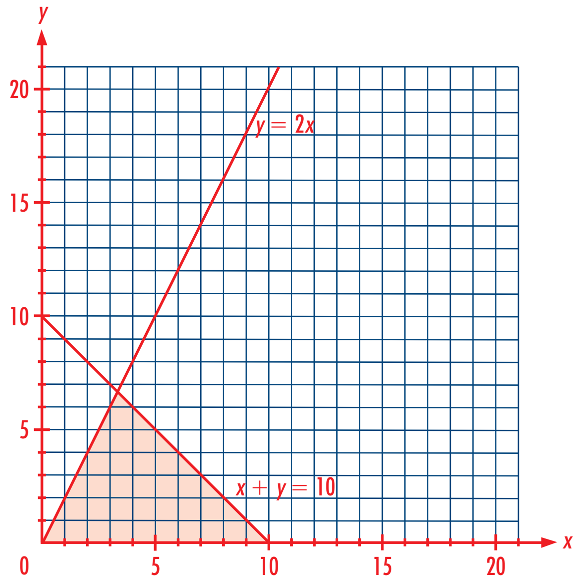
coût minimal : 48 000 $ pour un mur délimitant un rectangle de 40 m sur 30 m,

coût maximal : 125 000 $ pour un mur délimitant un rectangle de 75 m sur 100 m.

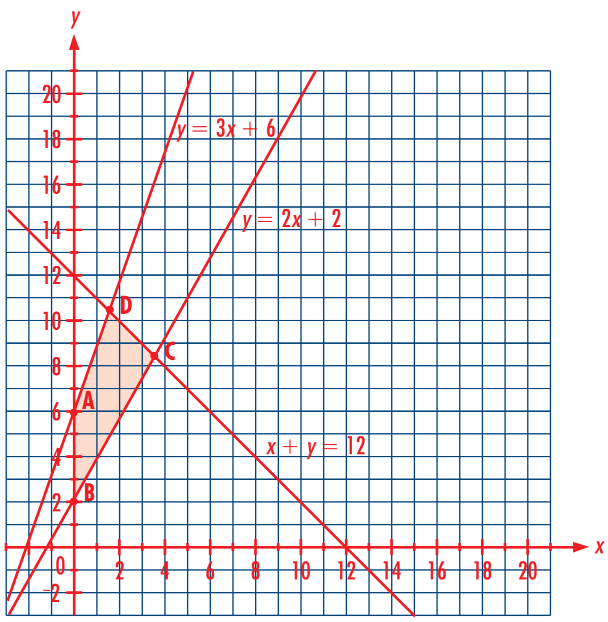
CORRIGÉ, p. 24

Autoévaluation

1. a)

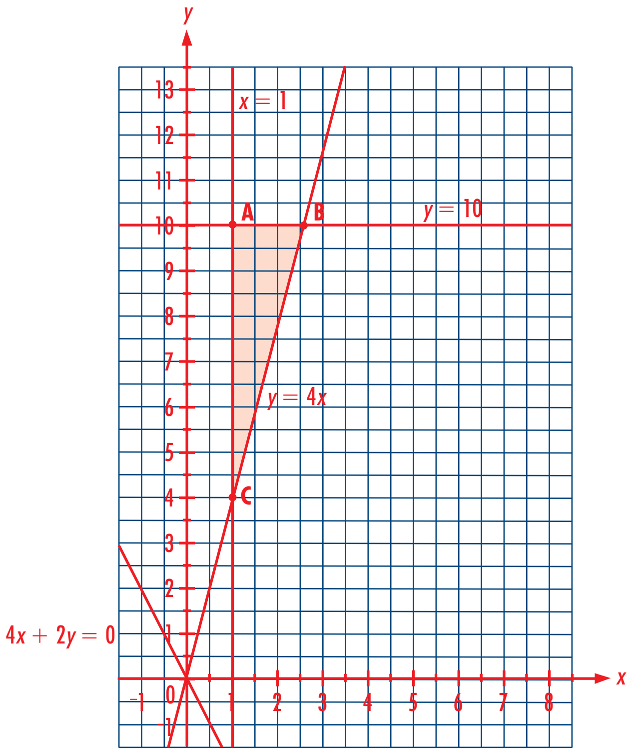


b)



CORRIGÉ, p. 24 (*suite*)

c)



2. **a)** **A**(0,0), **B**$\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$, **C**$\left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right)$ et **D**(3, 0)

b) La valeur maximale est 52. Le point **C**$\left(\frac{11}{3}, \frac{4}{3}\right)$ engendre ce maximum.

La valeur minimale est 0. Les coordonnées du point **A**(0, 0) engendrent ce minimum.

3. **a)** Pour minimiser les coûts de production, ils doivent produire 2 services de vaisselle à motifs de cactus et 6 à motifs de cerises. C'est la seule réponse possible puisque le point (2, 6) est le seul sommet du polygone de contraintes qui engendre des coûts de 542 $.

b) Pour maximiser leurs revenus, ils doivent produire 6 services de vaisselle à motifs de cactus et 14 à motifs de cerises. C'est la seule réponse possible puisque le point (6, 14) est le seul sommet du polygone de contraintes qui engendre des revenus de 1810 $.

c) Le profit minimal se chiffre à 188 $ et le profit maximal à 488 $.

CORRIGÉ, p. 25

Autoévaluation (*suite*)

4. **a)** Il est possible de fabriquer toutes les combinaisons de tables et de chaises qui correspondent à des points du polygone de contraintes **ABC** ci-dessous dont les coordonnées sont des nombres entiers.

Par exemple, la compagnie pourrait vendre 30 tables et 200 chaises, ou 40 tables et 220 chaises.

Contraintes :

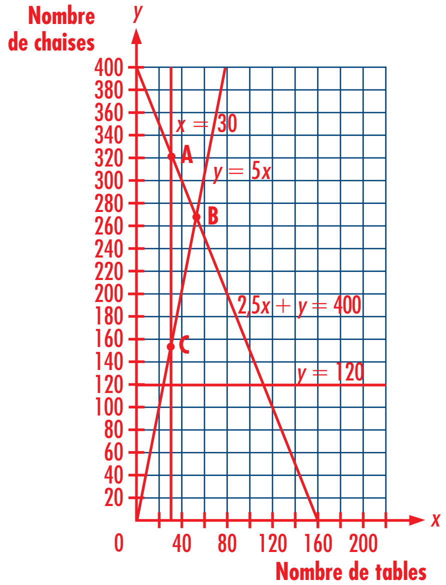
$y \geq 5x$

$x \geq 30$

$y \geq 120$

$2{,}5x + y \leq 400$

CORRIGÉ, p. 25 (*suite*)



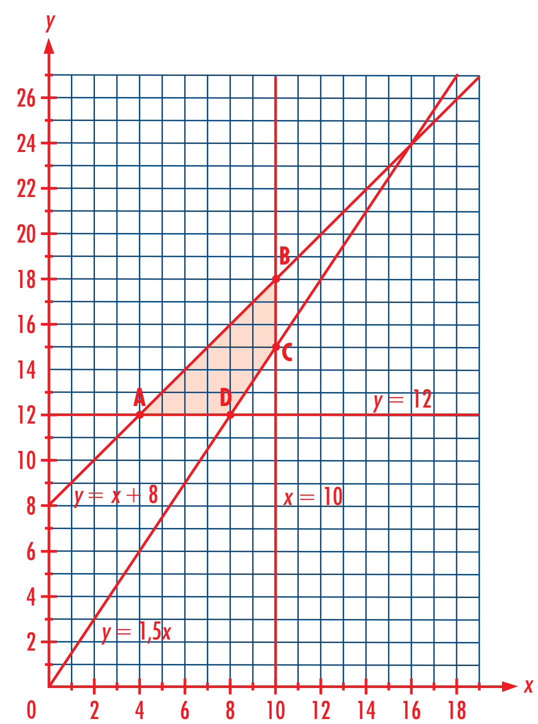
b) Le profit maximal est de 3850 $, en fabriquant 30 tables et 325 chaises.

$Z = 20x + 10y$

$Z = 20(30) + 10(325) = 3850\,\$$

c) Le client devra attendre 5,6 semaines avant de recevoir ses 300 ensembles de jardin $\left(\text{soit } \dfrac{300 \times 2{,}5 + 1500}{400}\right)$, car la compagnie devra fabriquer au moins 1500 chaises (soit 300 x 5) pour valider une des contraintes

5.



Le périmètre maximal de la maison est de 56 m.

$Z = 2x + 2y$

$Z = 2(10) + 2(18) = 56$