MODULE 3
La fonction racine carrée

CORRIGÉ, p. 66 (SN p. 68)

Préparation

1. a) $\frac{7\sqrt{61}}{10}$ cm

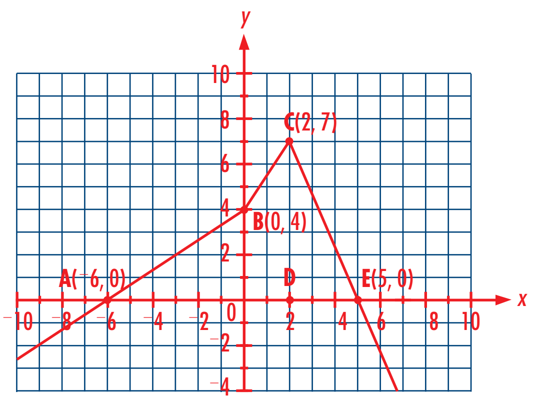
b) 6,5 cm

c) 24 plaques

d) $\frac{10\sqrt{10}}{7}$ secondes

2. Il existe une infinité de fonctions possibles.

Voici une fonction qui respecte les propriétés données :



3. a) $x = {}^-4$ ou $x = 4$

b) $x = {}^-10$ ou $x = 4$

c) $x = \frac{{}^-\sqrt{70}}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{70}}{2}$

d) Aucune solution.

CORRIGÉ, p. 67 (SN p. 69)

Activité 1

1^er^ temps

a) L'expression algébrique représentant le volume est : πr^2.

La formule du volume d'un cylindre est :

$V = A_{base} \times \text{hauteur}$,

$V = \pi r^2 \times \text{hauteur}$.

Par hypothèse, la hauteur du cylindre est 1 m :

$V = \pi r^2 \times 1$,

$V = \pi r^2$.

b) L'expression algébrique représentant le rayon est : $\frac{\sqrt{V\pi}}{\pi}$.

On doit isoler la variable r dans l'équation suivante : $V = \pi r^2$.

On divise chaque membre de l'équation par π : $\frac{V}{\pi} = r^2$.

Donc, $r = \pm\sqrt{\frac{V}{\pi}}$. La racine négative est à rejeter, car la mesure du rayon du cercle est supérieure à zéro :

$r = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{V}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{V\pi}}{\pi}$.

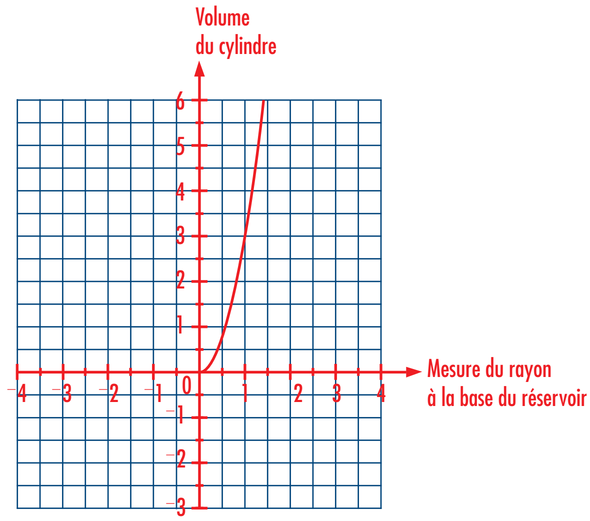
c)

Rayon (r)	Volume (V)
0	0
1	π
2	4π
3	9π
4	16π
5	25π
6	36π
7	49π

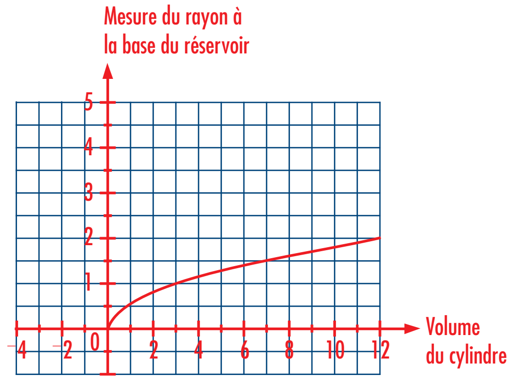
Volume (V)	Rayon (r)
0	0
π	1
4π	2
9π	3
16π	4
25π	5
36π	6
49π	7

On remarque que les valeurs dans les deux tableaux sont identiques, mais que les variables indépendantes et dépendantes ont été changées l'une pour l'autre. On travaille la relation réciproque pour passer d'un tableau à l'autre.

Le graphique de la fonction $V = \pi r^2$ est :



Le graphique de la fonction $r = \frac{\sqrt{V\pi}}{\pi}$ est :



CORRIGÉ, p. 67 (SN p. 69) (*suite*)

d) Propriétés

$V = \pi r^2$

Domaine	$[0, +\infty[$
Image	$[0, +\infty[$
Croissance et décroissance	Croissante sur $[0, +\infty[$
Zéro(s)	0
Ordonnée à l'origine	0
Signe	La fonction est positive sur $\mathbb{R}$
Extremums	Minimum : 0 Aucun maximum
Équation de l'axe de symétrie	Aucun axe de symétrie

$r = \frac{\sqrt{V\pi}}{\pi}$

Domaine	$[0, +\infty[$
Image	$[0, +\infty[$
Croissance et décroissance	Croissante sur $[0, +\infty[$
Zéro(s)	0
Ordonnée à l'origine	0
Signe	La fonction est positive sur $\mathbb{R}$
Extremums	Minimum : 0 Aucun maximum
Équation de l'axe de symétrie	Aucun axe de symétrie

e)

1) Pour une variation constante de $+1$ du rayon à partir du sommet de la fonction, la variation du volume correspond à la suite des nombres impairs multipliés par π (π, 3π, 5π, 7π, …).

Variations	Rayon (r)	Volume (V)	Variations
	0	0	
$+1$	1	π	$+\pi$
$+1$	2	4π	$+3\pi$
$+1$	3	9π	$+5\pi$
$+1$	4	16π	$+7\pi$
$+1$	5	25π	$+9\pi$
$+1$	6	36π	$+11\pi$
$+1$	7	49π	$+13\pi$

2) La variation du rayon est constante ($+1$) lorsque celle du volume correspond à la suite des nombres impairs multipliés par π (π, 3π, 5π, 7π, …).

Variations	Volume (V)	Rayon (r)	Variations
	0	0	
$+\pi$	π	1	$+1$
$+3\pi$	4π	2	$+1$
$+5\pi$	9π	3	$+1$
$+7\pi$	16π	4	$+1$
$+9\pi$	25π	5	$+1$
$+11\pi$	36π	6	$+1$
$+13\pi$	49π	7	$+1$

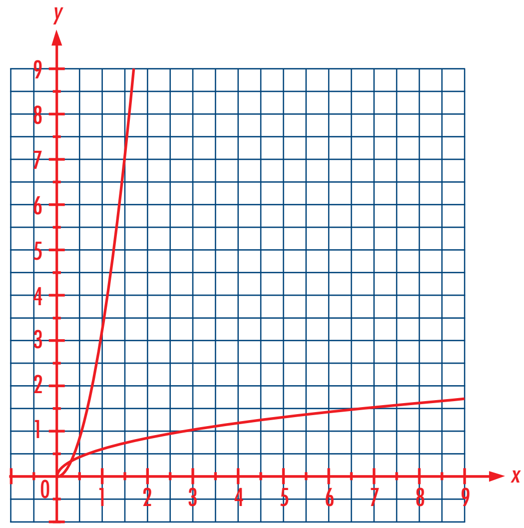
Le domaine des deux fonctions est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, puisque la mesure du rayon et le volume du cylindre doivent être des nombres réels positifs.

2e temps

Pour donner les propriétés des fonctions, il est plus facile de regarder les graphiques des deux fonctions.

CORRIGÉ, p. 67 (SN p. 69) (*suite*)

3e temps



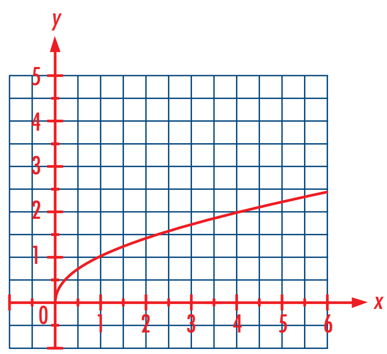
CORRIGÉ, p. 68 (SN p. 70)

Activité 2

Partie 1

Feuille 1

x	$f_1(x) = \sqrt{x}$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
4	2
5	$\sqrt{5}$
6	$\sqrt{6}$
9	3
10	$\sqrt{10}$
16	4
17	$\sqrt{17}$



Propriétés :

Domaine	$[0, +\infty[$
Image	$[0, +\infty[$
Croissance et décroissance	Croissante sur $[0, +\infty[$
Zéro(s)	0
Ordonnée à l'origine	0
Signe	Positive sur $[0, +\infty[$
Extremums	Minimum : 0 Aucun maximum

CORRIGÉ, p. 68 (SN p. 70) (*suite*)

Feuille 1 (*suite*)

Variations	x	$f_1(x) = \sqrt{x}$	Variations
	0	0	
$^{+}1$	1	1	$^{+}1$
$^{+}1$	2	$\sqrt{2}$	$^{+}\approx 0{,}41$
$^{+}1$	3	$\sqrt{3}$	$^{+}\approx 0{,}32$
$^{+}1$	4	2	$^{+}\approx 0{,}271$
$^{+}1$	5	$\sqrt{5}$	$^{+}\approx 0{,}24$
$^{+}1$	6	$\sqrt{6}$	$^{+}\approx 0{,}21$
$^{+}1$	7	$\sqrt{7}$	$^{+}\approx 0{,}20$
$^{+}1$	8	$2\sqrt{2}$	$^{+}\approx 0{,}18$
$^{+}1$	9	3	$^{+}\approx 0{,}17$
$^{+}1$	10	$\sqrt{10}$	$^{+}\approx 0{,}16$

Les variations de la variable indépendante sont positives à partir du sommet et elles diminuent avec l'augmentation de la variable.

Les variations de la variable dépendante sont positives et constantes ($^{+}1$) à partir du sommet.

Ou bien :

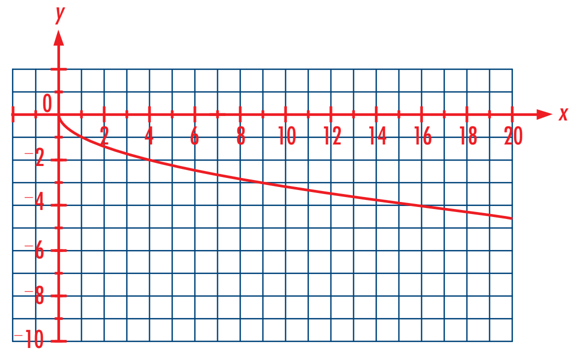
Variations	x	$f_2(x) = \sqrt{x}$	Variations
	0	0	
$^{+}1$	1	1	$^{+}1$
$^{+}3$	4	2	$^{+}1$
$^{+}5$	9	3	$^{+}1$
$^{+}7$	16	4	$^{+}1$
$^{+}9$	25	5	$^{+}1$
$^{+}11$	36	6	$^{+}1$
$^{+}13$	49	7	$^{+}1$
$^{+}15$	64	8	$^{+}1$
$^{+}17$	81	9	$^{+}1$
$^{+}19$	100	10	$^{+}1$

Pour une variation constante de la variable dépendante ($^{+}1$) à partir du sommet de la fonction, la variation de la variable indépendante correspond à la suite des nombres impairs (1, 3, 5, 7, 9, …). De plus, les variations des deux variables sont positives à partir du sommet.

CORRIGÉ, p. 68 (SN p. 70) (*suite*)

Feuille 2

x	$f_2(x) = {}^{-}\sqrt{x}$
0	0
1	$^{-}1$
4	$^{-}2$
5	$^{-}\sqrt{5}$
9	$^{-}3$
10	$^{-}\sqrt{10}$
11	$^{-}\sqrt{11}$
12	$^{-}2\sqrt{3}$
16	$^{-}4$
19	$^{-}\sqrt{19}$
20	$^{-}2\sqrt{5}$



Propriétés :

Domaine	$[0, {}^{+}\infty[$
Image	$]{}^{-}\infty, 0]$
Croissance et décroissance	Décroissante sur $[0, {}^{+}\infty[$
Zéro(s)	0
Ordonnée à l'origine	0
Signe	Négative sur $[0, {}^{+}\infty[$
Extremums	Maximum : 0 Aucun minimum

Feuille 2 (*suite*)

Variations	x	$f_2(x) = {}^{-}\sqrt{x}$	Variations
	0	0	
$^{+}1$	1	$^{-}1$	$^{-}1$
$^{+}3$	4	$^{-}2$	$^{-}1$
$^{+}5$	9	$^{-}3$	$^{-}1$
$^{+}7$	16	$^{-}4$	$^{-}1$
$^{+}9$	25	$^{-}5$	$^{-}1$
$^{+}11$	36	$^{-}6$	$^{-}1$
$^{+}13$	49	$^{-}7$	$^{-}1$
$^{+}15$	64	$^{-}8$	$^{-}1$
$^{+}17$	81	$^{-}9$	$^{-}1$
$^{+}19$	100	$^{-}10$	$^{-}1$

Pour une variation constante de la variable dépendante ($^{-}1$) à partir du sommet de la fonction, la variation de la variable indépendante correspond à la suite des nombres impairs (1, 3, 5, 7, 9, …). De plus, les variations de la variable indépendante sont positives à partir du sommet, tandis que celles de la variable dépendante sont négatives à partir du sommet.

CORRIGÉ, p. 68 (SN p. 70) (*suite*)

Partie 2

a) $a = b = 1$ et $h = k = 0$

$f(x) = a\sqrt{b(x - h)} + k$

$f(x) = 1\sqrt{1(x - 0)} + 0$

CORRIGÉ, p. 69 (SN p. 71)

Activité 2 (*suite*)

Partie 2 (*suite*)

b) Paramètre *a*:

En faisant varier la valeur du paramètre a, on observe une dilatation ou une contraction verticale du graphique. Un changement de signe du paramètre a provoque une réflexion par rapport à l'axe des abscisses.

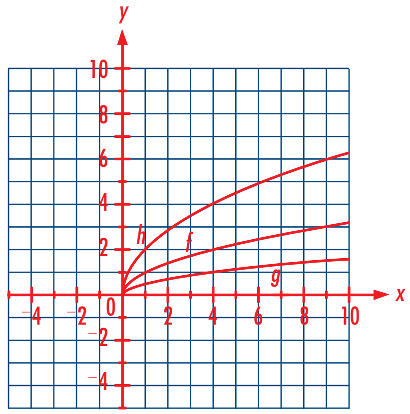
Modifions la valeur du paramètre a:

Par exemple:

$f(x) = \sqrt{x}$,

$g(x) = 0{,}5\sqrt{x}$ et

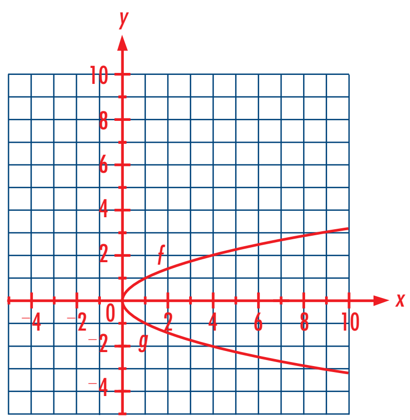
$h(x) = 2\sqrt{x}$.



On remarque alors que si le paramètre a affiche une valeur négative, le graphique subit une réflexion selon l'axe des abscisses.

Par exemple:

$f(x) = |x|$ et $g(x) = {}^{-}|x|$



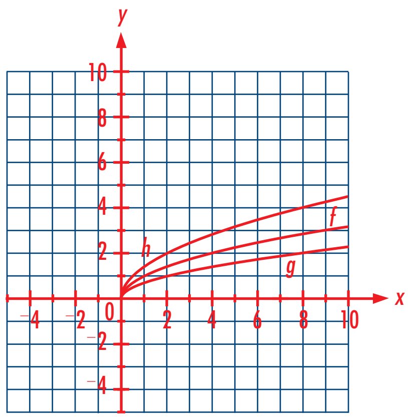
Paramètre b:

En faisant varier la valeur du paramètre b, on observe une dilatation ou une contraction horizontale du graphique. Un changement de signe du paramètre b provoque une réflexion par rapport à l'axe des ordonnées.

Modifions la valeur du paramètre b:

Par exemple:

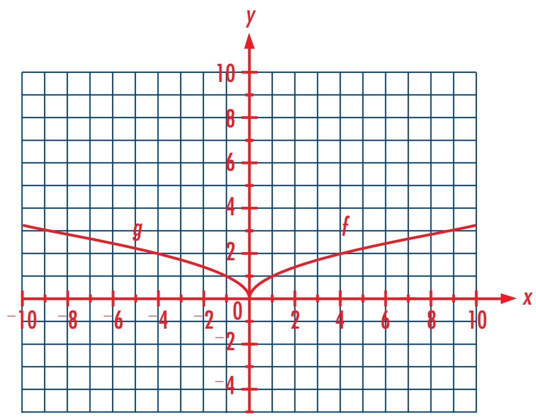
$f(x) = \sqrt{x}$,
$g(x) = \sqrt{0{,}5x}$ et
$h(x) = \sqrt{2x}$.



On remarque alors que si le paramètre b affiche une valeur négative, le graphique subit une réflexion selon l'axe des ordonnées.

Par exemple:

$f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \sqrt{^{-}x}$

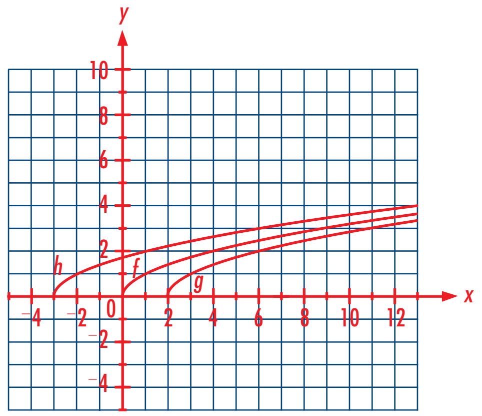


Paramètre *h*:

En faisant varier la valeur du paramètre *h*, on observe une translation horizontale du graphique. Si *h* affiche une valeur positive, la translation est vers la droite, si sa valeur est négative, la translation est vers la gauche.

Par exemple:

$f(x) = \sqrt{x}$,
$g(x) = \sqrt{x - 2}$ et
$h(x) = \sqrt{x + 3}$.

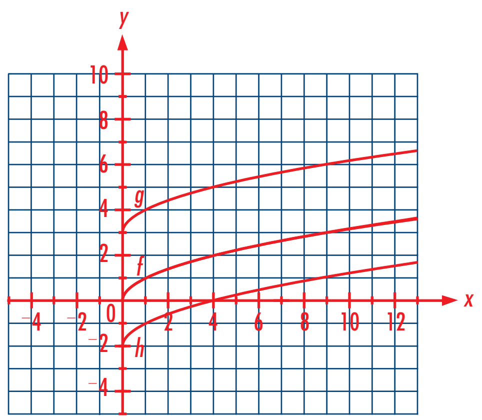


Paramètre *k*:

En faisant varier la valeur du paramètre *k*, on observe une translation verticale du graphique. Si *k* affiche une valeur positive, la translation est vers le haut, si sa valeur est négative, la translation est vers le bas.

Par exemple:

$f(x) = \sqrt{x}$,
$g(x) = \sqrt{x} + 2$ et
$h(x) = \sqrt{x} - 3$.



c)

Paramètre	Transformations géométriques
a	Dilatation ou contraction verticale et réflexion par rapport à l'axe des abscisses: $(x, y) \rightarrow (x, ay)$
b	Dilatation ou contraction horizontale et réflexion par rapport à l'axe des ordonnées: $(x, y) \rightarrow \left(\frac{1x}{b}, y\right)$
h	Translation horizontale: $(x, y) \rightarrow (x + h, y)$
k	Translation verticale: $(x, y) \rightarrow (x, y + k)$

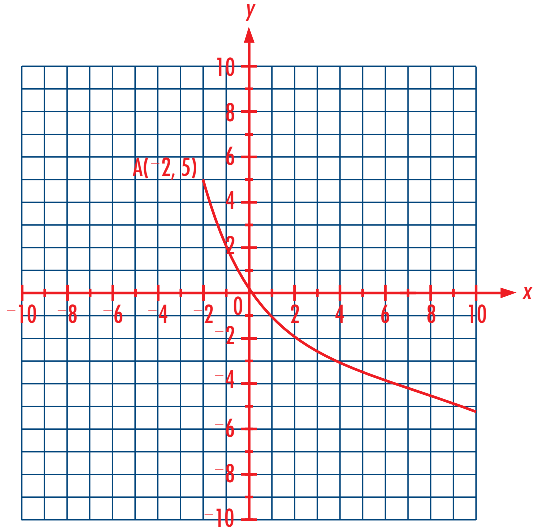
CORRIGÉ, p. 69 (SN p. 71) (*suite*)

Partie 3

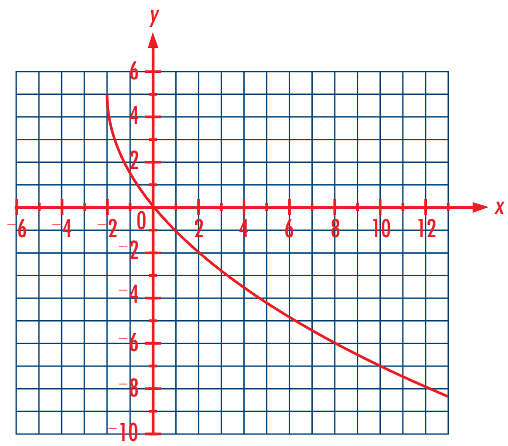
a) Il existe une infinité d'équations possibles.

Par exemple : $f(x) = {}^{-}2\sqrt{3(x+2)} + 5$

b)



c)



CORRIGÉ, p. 70 (SN p. 72)

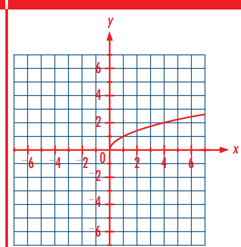
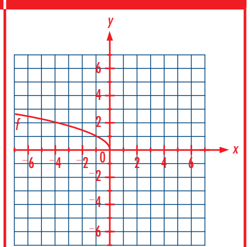
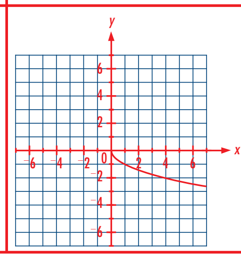
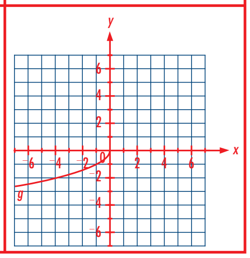
Activité 3

1^er^ temps

Il faut écrire chacune des équations sous la forme canonique afin de faire ressortir les valeurs des paramètres *a*, *b*, *h* et *k*.

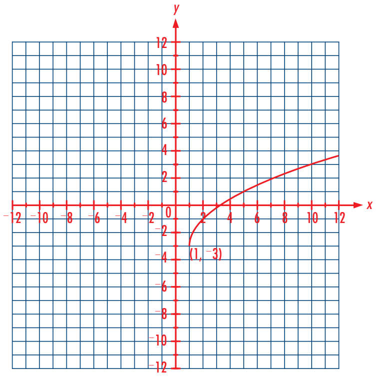
Le sommet de la fonction racine carrée correspond au point (*h*, *k*).

L'allure de la courbe dépend des signes des paramètres *a* et *b* :

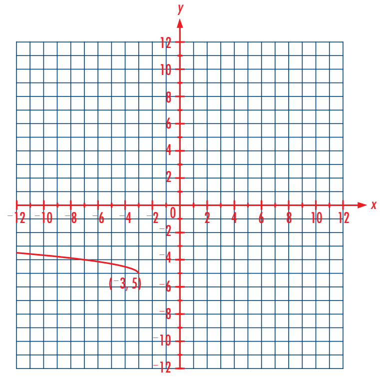
Paramètre	$b > 0$	$b < 0$
$a > 0$		
$a < 0$		

CORRIGÉ, p. 70 (SN p. 72) (*suite*)

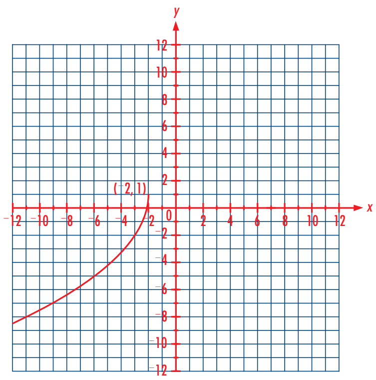
$f(x) = 2\sqrt{x - 1} - 3$



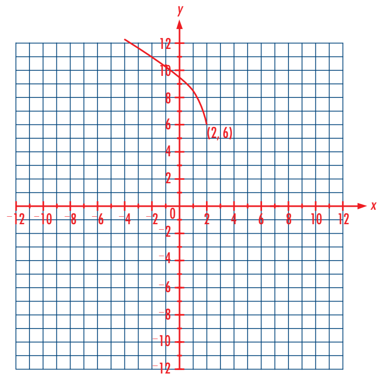
$g(x) = \sqrt{^{-}\frac{1}{4}(x + 3)} - 5$



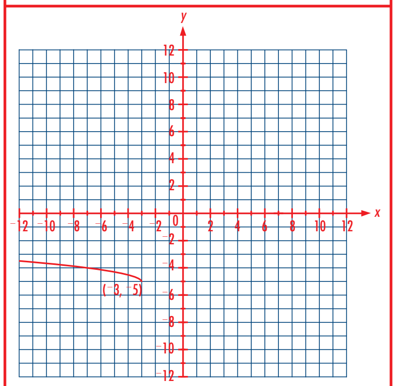
$h(x) = {}^{-}3\sqrt{^{-}x - 2} + 1$



$i(x) = \frac{5}{4}\sqrt{^{-}4(x - 2)} + 6$



$j(x) = \frac{1}{2}\sqrt{^{-}x - 3} - 5$



	Fonctions		
Propriété	$f(x) = 2\sqrt{x - 1} - 3$	$g(x) = \sqrt{^-\frac{1}{4}(x + 3)} - 5$	$h(x) = {^-3}\sqrt{^-x - 2} + 1$
Domaine	$[1, ^+\infty[$	$]^-\infty, ^-3]$	$]^-\infty, ^-2]$
Image	$[^-3, ^+\infty[$	$[^-5, ^+\infty[$	$]^-\infty, 1]$
Croissance et décroissance	Croissante sur $[1, ^+\infty[$	Décroissante sur $]^-\infty, ^-3]$	Croissante sur $]^-\infty, ^-2]$
Zéro(s)	$\frac{13}{4}$	$^-103$	$\frac{^-19}{9}$
Ordonnée à l'origine	Aucune	Aucune	Aucune
Signe	La fonction est négative sur $\left[1, \frac{13}{4}\right]$ La fonction est positive sur $\left[\frac{13}{4}, ^+\infty\right[$	La fonction est positive sur $]^-\infty, ^-103]$ La fonction est négative sur $[^-103, ^-3]$	La fonction est négative sur $\left]^-\infty, \frac{^-19}{9}\right]$ La fonction est positive sur $\left[\frac{^-19}{9}, ^-2\right]$
Extremums	Minimum : $^-3$ Aucun maximum	Minimum : $^-5$ Aucun maximum	Maximum : 1 Aucun maximum

	Fonctions	
Propriété	$i(x) = \frac{5}{4}\sqrt{^-4(x - 2)} + 6$	$j(x) = \frac{1}{2}\sqrt{^-x - 3} - 5$
Domaine	$]^-\infty, 2]$	$]^-\infty, ^-3]$
Image	$[6, ^+\infty[$	$[^-5, ^+\infty[$
Croissance et décroissance	Décroissante sur $]^-\infty, 2]$	Décroissante sur $]^-\infty, ^-3]$
Zéro(s)	Aucun	$^-103$
Ordonnée à l'origine	$\approx 9{,}54$	Aucune
Signe	La fonction est positive sur $]^-\infty, 2]$	La fonction est positive sur $]^-\infty, ^-103]$ La fonction est négative sur $[^-103, ^-3]$
Extremums	Minimum : 6 Aucun maximum	Minimum : $^-5$ Aucun maximum

2e temps

Les démarches peuvent s'appuyer sur une résolution algébrique ou une résolution graphique. Pour obtenir des valeurs exactes, la résolution algébrique est préférable.

CORRIGÉ, p. 70 (SN p. 72) (*suite*)

3e temps

La résolution algébrique permet d'obtenir des valeurs exactes. La résolution graphique permet de déterminer rapidement le domaine, l'image, les intervalles de croissance et de décroissance ainsi que les valeurs des extremums. De plus, elle indique également si la fonction a une ordonnée à l'origine.

a) Les graphiques des fonctions g et j sont identiques.

b) Les équations des fonctions g et j sont équivalentes.

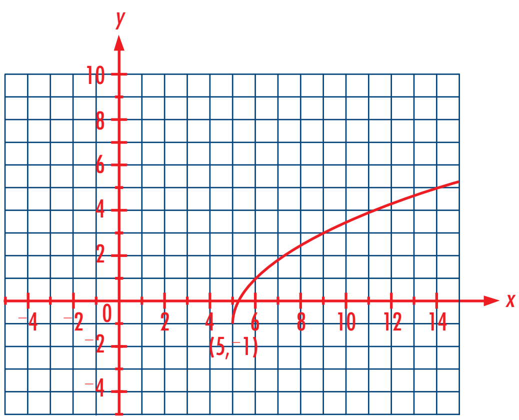
En effet, on peut utiliser la propriété suivante : $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$

$$g(x) = \sqrt{\frac{^{-}1}{4}(x+3)} - 5$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{^{-}(x+3)} - 5$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{^{-}(x+3)} - 5$$
$$= j(x)$$

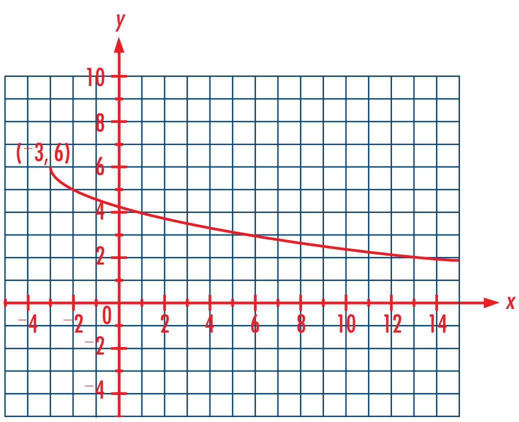
CORRIGÉ, p. 80 (SN p. 82)

Exercices

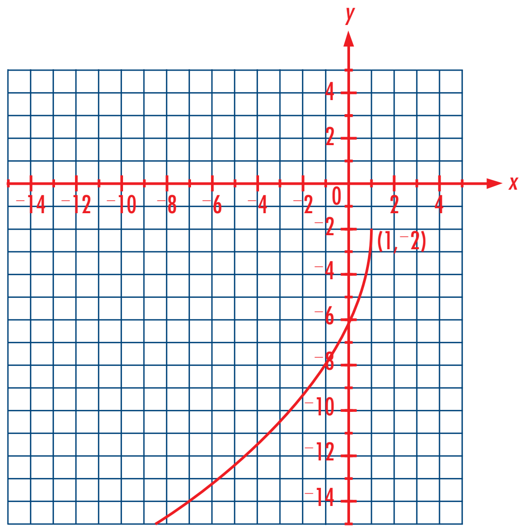
1. a)



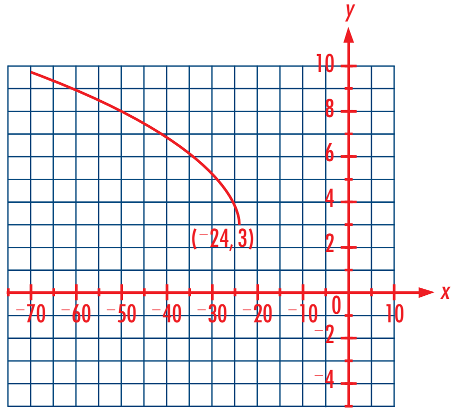
b)



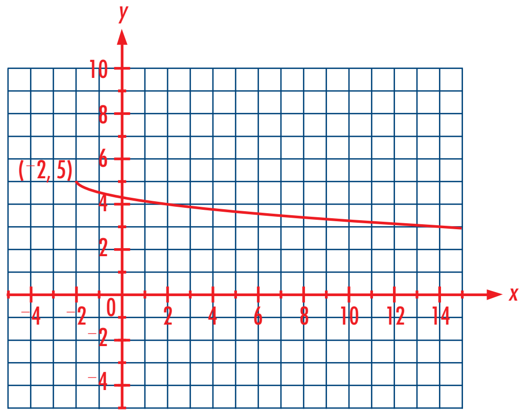
c)


y
x
4
2
⁻14
⁻12
⁻10
⁻8
⁻6
⁻4
⁻2
0
2
4
⁻2
(1, ⁻2)
⁻4
⁻6
⁻8
⁻10
⁻12
⁻14

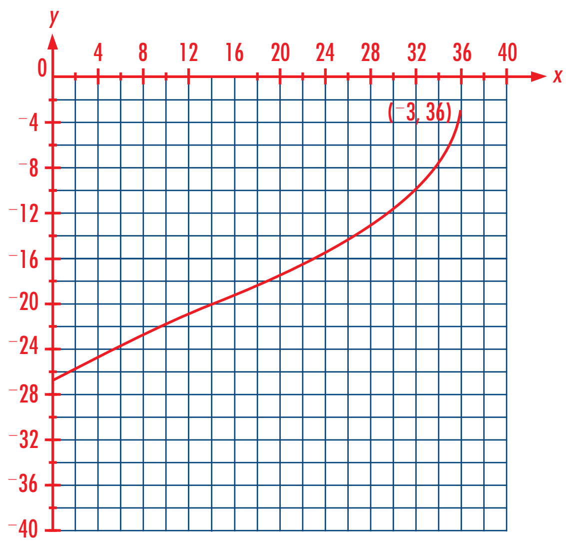
d)


y
10
8
6
4
(⁻24, 3)
2
x
⁻70
⁻60
⁻50
⁻40
⁻30
⁻20
⁻10
0
10
⁻2
⁻4

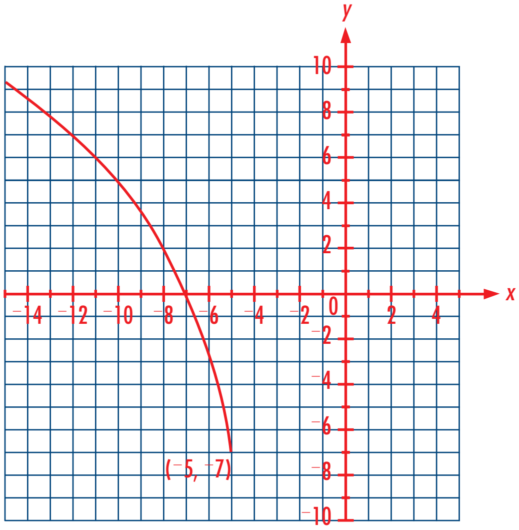
e)


y
10
8
(⁻2, 5)
6
4
2
x
⁻4
⁻2
0
2
4
6
8
10
12
14
⁻2
⁻4

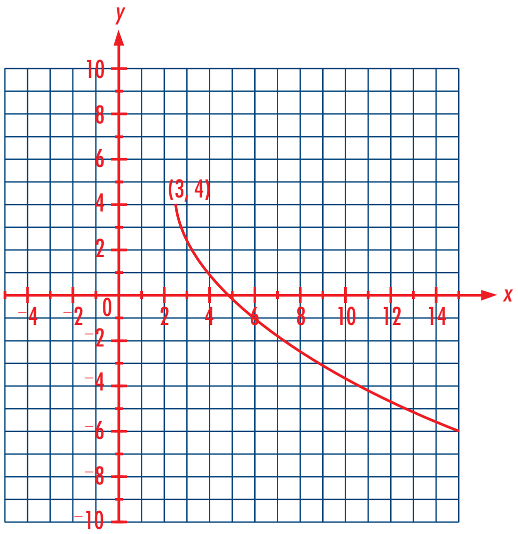
f)


y
4
8
12
16
20
24
28
32
36
40
0
x
⁻4
(⁻3, 36)
⁻8
⁻12
⁻16
⁻20
⁻24
⁻28
⁻32
⁻36
⁻40

g)



h)



2. a) $S\left(\frac{3}{5}, {}^{-}4\right)$ et dom $f = \left[\frac{3}{5}, {}^{+}\infty\right[$

b) $S\left({}^{-}12, 1\right)$ et dom $f = \left[{}^{-}12, {}^{+}\infty\right[$

c) $S\left({}^{-}1, {}^{-}5\right)$ et dom $f = \left]{}^{-}\infty, {}^{-}1\right]$

d) $S\left({}^{-}7, 9\right)$ et dom $f = \left]{}^{-}\infty, {}^{-}7\right]$

e) $S\left({}^{-}1, 3\right)$ et dom $f = \left[{}^{-}1, {}^{+}\infty\right[$

f) $S\left({}^{-}25, {}^{-}2\right)$ et dom $f = \left]{}^{-}\infty, {}^{-}25\right]$

g) $S\left(\frac{1}{4}, 8\right)$ et dom $f = \left]{}^{-}\infty, \frac{1}{4}\right]$

h) $S\left(\frac{{}^{-}4}{3}, {}^{-}1\right)$ et dom $f = \left[\frac{{}^{-}4}{3}, {}^{+}\infty\right[$

3. a) Minimum : $^{-}3$

b) Maximum : 7

c) Maximum : $^{-}2$

d) Minimum : 4

e) Minimum : 9

f) Minimum : $^{-}5$

g) Maximum : 0

h) Maximum : $^{-}1$

CORRIGÉ, p. 80 (SN p. 82) (*suite*)

4. a) Le zéro est 9,2 et il n'y a pas d'ordonnée à l'origine.

b) Le zéro est $^-77$ et l'ordonnée à l'origine est 21.

c) Le zéro est $\frac{^-1}{3}$ et l'ordonnée à l'origine est $\sqrt{15} - 4$.

d) Le zéro est $\frac{^-617}{2}$ et l'ordonnée à l'origine est $10\sqrt{2} - 125$.

e) La fonction n'a pas de zéro ni d'ordonnée à l'origine.

f) Le zéro est $^-265$ et il n'y a pas d'ordonnée à l'origine.

g) Le zéro est $\frac{^-39}{2}$ et l'ordonnée à l'origine est $^-5(\sqrt{3} - 9)$.

h) La fonction n'a pas de zéro et l'ordonnée à l'origine est $\frac{5\sqrt{5}}{8} + 10$.

5. a) La fonction est croissante et son domaine est $\left[3, ^+\infty\right[$.

b) La fonction est décroissante et son domaine est $\left]^-\infty, 2\right]$.

c) La fonction est décroissante et son domaine est $\left[\frac{^-7}{3}, ^+\infty\right[$.

d) La fonction est croissante et son domaine est $\left]^-\infty, 4\right]$.

e) La fonction est décroissante et son domaine est $\left[11, ^+\infty\right[$.

f) La fonction est décroissante et son domaine est $\left]^-\infty, ^-22\right]$.

g) La fonction est décroissante et son domaine est $\left]^-\infty, 8\right]$.

h) La fonction est croissante et son domaine est $\left]^-\infty, 2\right]$.

CORRIGÉ, p. 81 (SN p. 83)

Exercices (*suite*)

6. a) $\left[9, ^+\infty\right[$

b) $\left]8, 12\right]$

c) $\left]^-\infty, ^-24\right[$

d) $\left]^-\infty, ^-4\right[$

e) $\left]\frac{8}{3}, ^+\infty\right[$

f) $\left[^-\infty, ^-7\right[$

g) $\left[^-7, 33\right[$

h) $\left]^-\infty, 2\right]$

7. a) 4

b) 1

c) 3

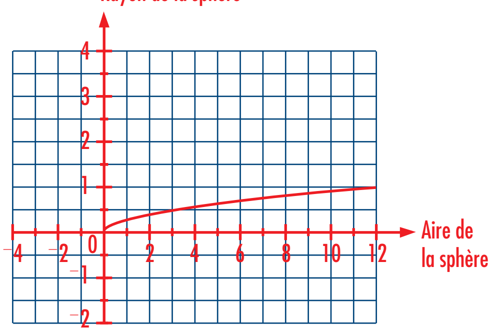
d) 2

CORRIGÉ, p. 82 (SN p. 84)

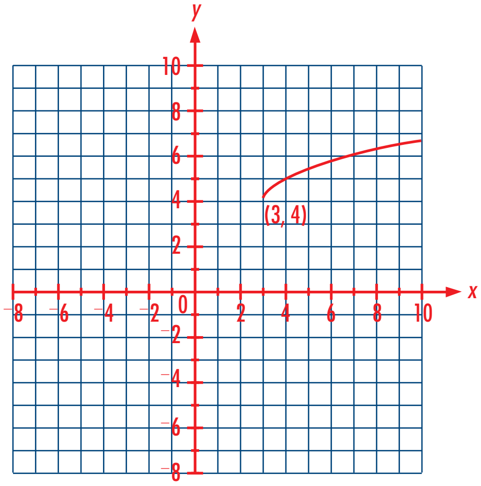
Exercices (*suite*)

8. $r = \frac{\sqrt{A\pi}}{2\pi}$

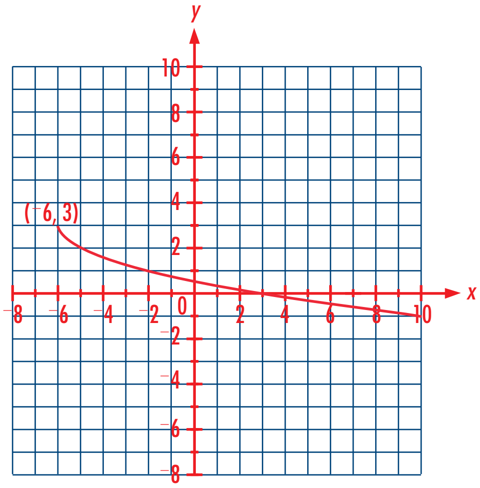
Domaine : $\left[0, +\infty\right[$



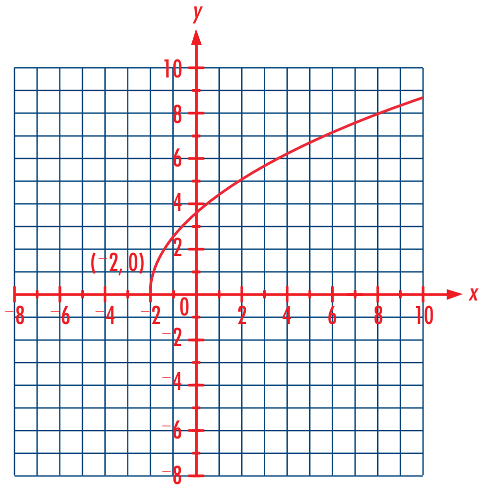
9. a)



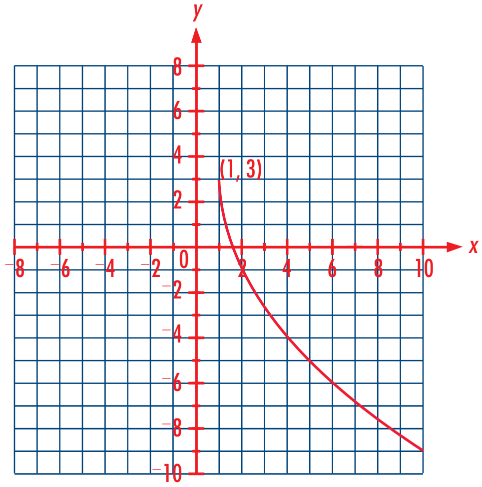
b)



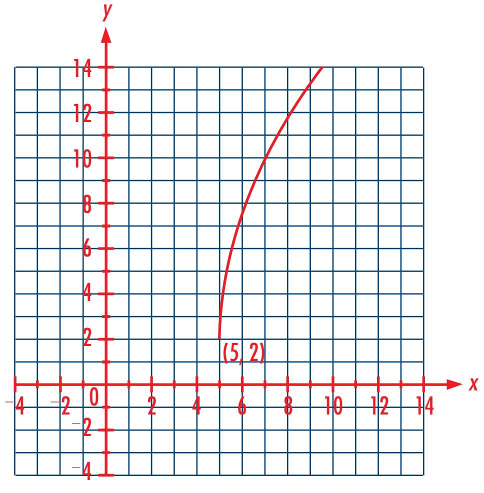
c)



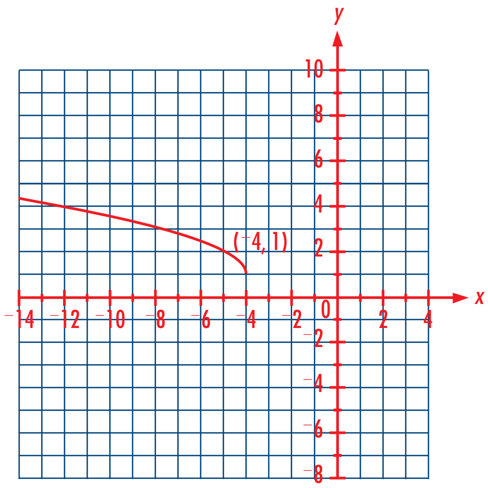
d)



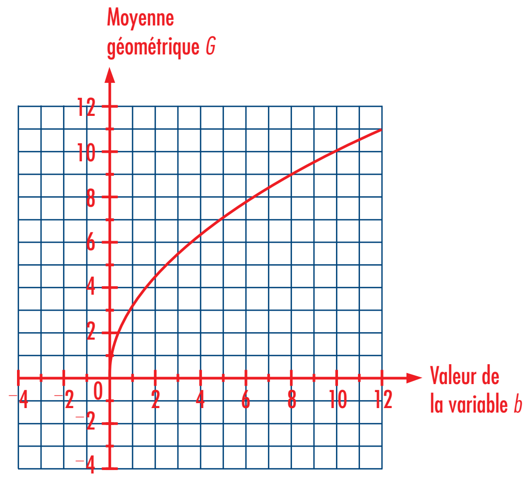
e)



f)



10. L'équation est : $G = \sqrt{10b}$ si $a = 10$.



11. **a)** S(8, 2)

b) S(−5, 5)

c) S(−2, 5)

d) S(3, 0)

e) S(0, 0)

f) S(3, 8)

12. **a)** dom $f = \left[{}^-1, {}^+\infty\right[$ et ima $f = \left[0, {}^+\infty\right[$

b) dom $f = \left[3, {}^+\infty\right[$ et ima $f = \left]{}^-\infty, 7\right]$

c) dom $f = \left]{}^-\infty, {}^-4\right]$ et ima $f = \left]{}^-\infty, 0\right]$

d) dom $f = \left]{}^-\infty, 2\right]$ et ima $f = \left[{}^-3, {}^+\infty\right[$

e) dom $f = \left]{}^-\infty, {}^-6\right]$ et ima $f = \left[1, {}^+\infty\right[$

f) dom $f = \left[{}^-2, {}^+\infty\right[$ et ima $f = \left]{}^-\infty, {}^-1\right]$

13. **a)** $\left[7, {}^+\infty\right[$

b) $\left[{}^-5, {}^+\infty\right[$

c) La fonction n'est jamais croissante.

d) La fonction n'est jamais croissante.

e) $\left]{}^-\infty, {}^-2\right]$

f) La fonction n'est jamais croissante.

CORRIGÉ, p. 83 (SN p. 85)

Exercices (*suite*)

14. a) 1

b) 5

c) 6

d) 3

e) 2

f) 4

15. a) $r = \dfrac{\sqrt{\pi A}}{\pi}$

b) $c = \dfrac{\sqrt{2V}}{2}$

c) $x = \dfrac{\sqrt{2(9-h)}}{2}$ ou $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{^-(h-9)}$, ou toute autre équation équivalente pour $h \in [0, 9]$.

d) $x = \sqrt{2A+4} - 2$ ou toute autre équation équivalente pour $x \in \,]0, {}^+\infty[$.

CORRIGÉ, p. 84 (SN p. 86)

Activité 4

1er temps

a) 1) $f(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x+3} - 2$

Puisque le graphique de la fonction racine carrée est situé à droite de son sommet, le paramètre b est positif.

Soit $b = 1$

$f(x) = a\sqrt{x-h} + k$

On remplace (h, k) par les coordonnées du sommet :

$f(x) = a\sqrt{x+3} - 2.$

On remplace (x, y) par les coordonnées du point $(1, 1)$ et on isole le paramètre a :

$1 = a\sqrt{1+3} - 2$

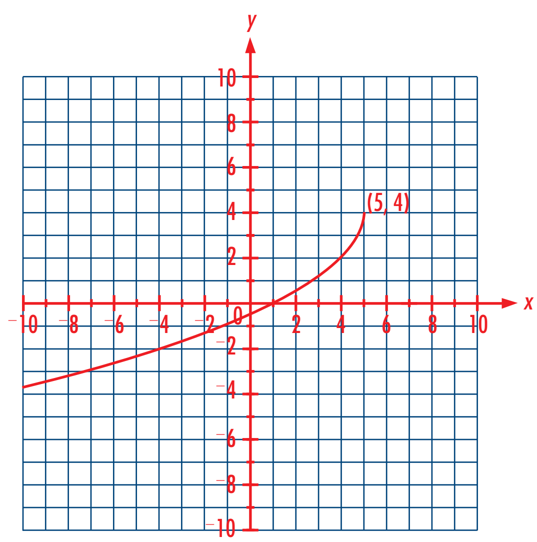
$3 = 2a$

$a = \dfrac{3}{2}$

On remplace la valeur du paramètre a dans son équation : $f(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{x+3} - 2.$

2) $f(x) = {}^-2\sqrt{-(x-5)} + 4$

Il est préférable de faire un dessin à main levée de la fonction à partir des propriétés données :



Puisque le graphique de la fonction racine carrée est situé à gauche de son sommet, le paramètre b est négatif.

Soit $b = {}^-1$

$f(x) = a\sqrt{^-1(x-h)} + k$

À partir du graphique, on peut déduire les coordonnées du sommet : (5, 4).

On remplace (h, k) par les coordonnées du sommet :

$f(x) = a\sqrt{^-(x - 5)} + 4.$

On remplace (x, y) par les coordonnées du point $(1, 0)$ et on isole le paramètre a :

$0 = a\sqrt{^-(1 - 5)} + 4$

$^-4 = 2a$

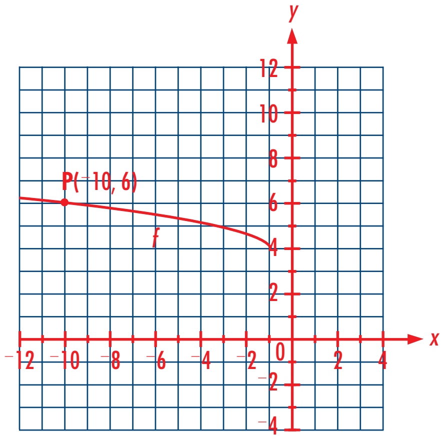
$a = \frac{^-4}{2} = {}^-2$

On remplace la valeur du paramètre a dans son équation : $f(x) = {}^-2\sqrt{^-(x - 5)} + 4.$

3) Il est impossible de déterminer l'équation de la fonction. Il faudrait connaître la valeur du paramètre h ou celle du paramètre k. Si on représente uniquement les deux points donnés dans un plan cartésien, on peut tracer une infinité de fonctions racine carrée passant par ces deux points. On peut aussi souligner que les signes des paramètres a et b devront être opposés.

4) $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{^-(x + 1)} + 4$

Il est préférable de faire un dessin à main levée de la fonction à partir des propriétés données :



Puisque le graphique de la fonction racine carrée est situé à gauche de son sommet, le paramètre b est négatif.

Soit $b = {}^-1$

$f(x) = a\sqrt{^-1(x - h)} + k$

À partir du graphique, on peut déduire les coordonnées du sommet : $(^-1, 4)$.

On remplace (h, k) par les coordonnées du sommet :

$f(x) = a\sqrt{^-(x + 1)} + 4.$

On remplace (x, y) par les coordonnées du point $(^-10, 6)$ et on isole le paramètre a :

$6 = a\sqrt{^-(^-10 + 1)} + 4$

$2 = 3a$

$a = \frac{2}{3}$

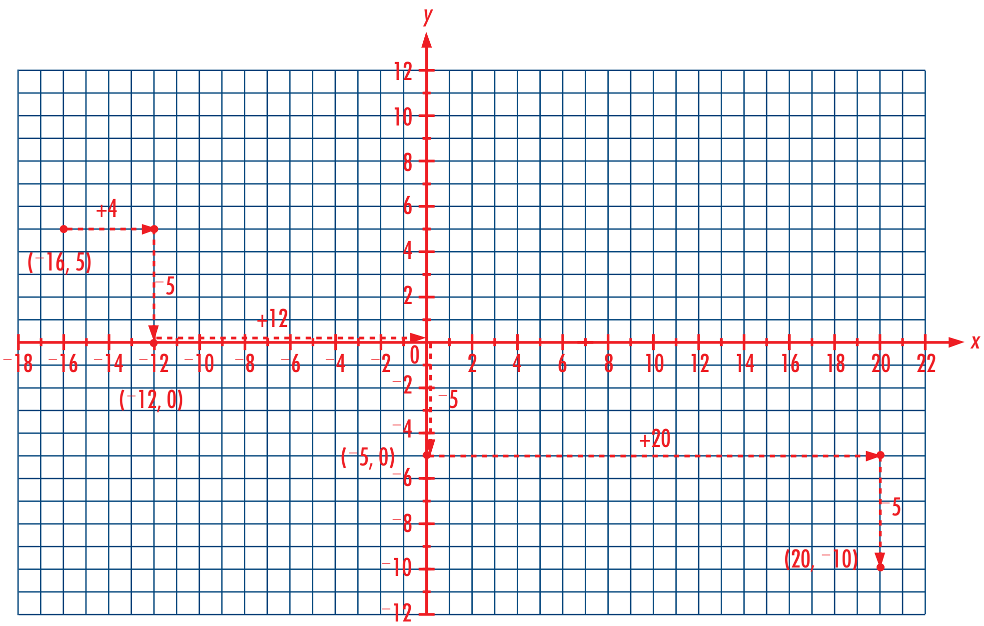
On remplace la valeur du paramètre a dans son équation : $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{^-(x + 1)} + 4.$

5) Il est impossible de déterminer l'équation. Il faudrait connaître la valeur du paramètre h ou celle du paramètre k. Les possibilités seraient parmi les deux groupes suivants :

$h > 0, k > 0, a > 0$ et $b > 0$

$h < 0, k < 0, a < 0$ et $b < 0.$

6) Il est possible de trouver l'équation passant par les trois points, mais ce n'est pas évident! Si on représente les trois points dans un plan cartésien, ainsi que les variations en x et en y entre ceux-ci, on obtient le graphique suivant:



La variation en y est constante, comme dans la variation de la fonction de base $\left(y = \sqrt{x}\right)$, mais elle est multipliée par $^-5$. Donc, on pourrait avoir $a = {^-5}$.

De plus, les deux variations en x sont celles de la fonction de base (soit 1, 3, 5, 7, …), mais elles ont été multipliées par 4 (soit 4, 12, 20, 28, …). Donc, on pourrait avoir $b = \frac{1}{4}$.

Si on utilise encore les suites des variations, les deux variations avant le point de coordonnées $(^-12, 0)$ seraient 4 (en x) et $^-5$ (en y) (en pointillés dans le graphique). Donc, le point avant $(^-12, 0)$ serait le sommet $(^-16, 5)$.

L'équation est alors: $f(x) = {^-5}\sqrt{\frac{1}{4}(x + 16)} + 5$.

b) Il existe une infinité d'équations équivalentes.

1) $f(x) = \sqrt{\frac{9}{4}(x + 3)} - 2$

En effet, on peut utiliser la propriété suivante, $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$:

$f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x + 3} - 2 = \sqrt{\frac{3^2}{2^2}(x + 3)} - 2 = \sqrt{\frac{9}{4}(x + 3)} - 2.$

2) $f(x) = {^-}\sqrt{^-4(x - 5)} + 4$

En effet, on peut utiliser la propriété suivante, $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$:

$f(x) = {^-2}\sqrt{-(x - 5)} + 4 = {^-}\sqrt{^-(2^2)(x - 5)} + 4 = {^-}\sqrt{-4(x - 5)} + 4.$

3) $f(x) = \sqrt{\frac{^-4}{9}(x + 1)} + 4$

En effet, on peut utiliser la propriété suivante, $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 \cdot b}$:

$f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{^-(x + 1)} + 4 = \sqrt{^-\left(\frac{2}{3}\right)^2(x + 1)} + 4 = \sqrt{\frac{^-4}{9}(x + 1)} + 4.$

2e temps

Pour trouver l'équation sous la forme canonique d'une fonction racine carrée, il suffit de connaître les coordonnées du sommet et un autre point de son graphique. Les coordonnées du sommet donnent les valeurs des paramètres h et k, et l'autre point donne le signe du paramètre b. Ainsi, on peut trouver l'équation sous la forme canonique:

$f(x) = a\sqrt{b(x - h)} + k$ ou $f(x) = a_1\sqrt{\pm 1(x - h)} + k$.

3e temps

La seconde forme $\left(f(x) = a_1\sqrt{\pm 1(x - h)} + k\right)$ est la plus pratique, car la valeur du paramètre b est limitée à 1 ou à $^-1$. De plus, en utilisant cette forme canonique, on obtient une équation unique.

CORRIGÉ, p. 85 (SN p. 87)

Activité 5

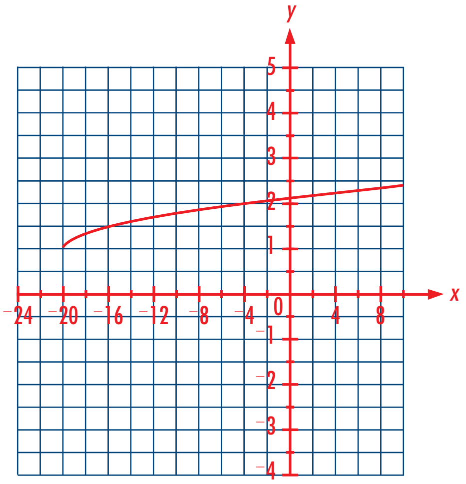
1^er temps

a) Aucune solution.

En isolant la racine carrée, on obtient :

$\sqrt{x + 20} = {}^{-}4$.

Une racine positive ne peut pas être égale à un nombre négatif.



b) $x \in [{}^{-}3, 13]$

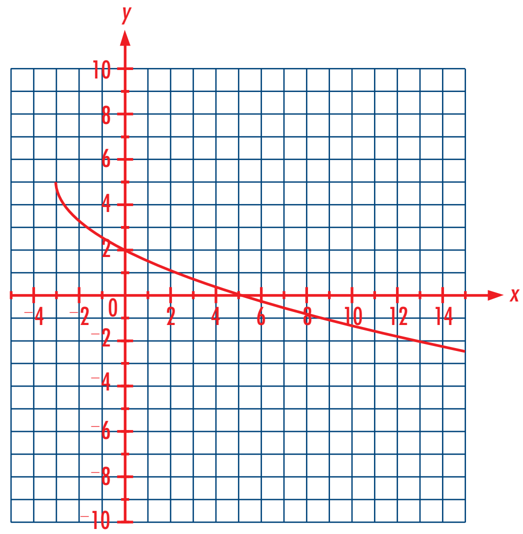
$\frac{-7}{4}\sqrt{x+3} + 5 \geq {}^{-}2$

$\frac{-7}{4}\sqrt{x+3} \geq {}^{-}7$

$\sqrt{x+3} \leq 4$

$x + 3 \leq 16$

$x \leq 13$



c) $x = \frac{^-5}{4}$

$^-\sqrt{^-16x + 80} + 7 = {^-3}$

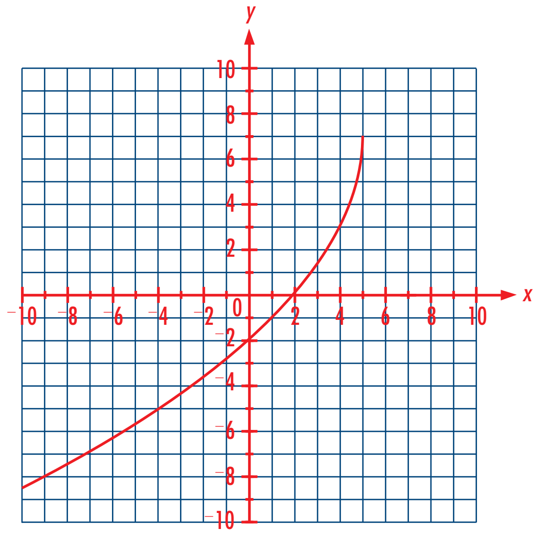
$^-\sqrt{^-16x + 80} = {^-10}$

$\sqrt{^-16x + 80} = 10$

$^-16x + 80 = 100$

$^-16x = 20$

$x = \frac{^-20}{16} = \frac{^-5}{4}$



d) $x \in \left]{^-\infty}, 6\right]$

Avec le graphique, c'est direct.

$\frac{5}{3}\sqrt{\frac{^-3}{4}\left(x - 6\right)} + \frac{5}{2} \geq 0$

$\frac{5}{3}\sqrt{\frac{^-3}{4}\left(x - 6\right)} \geq \frac{^-5}{2}$

$\sqrt{\frac{^-3}{4}\left(x - 6\right)} \geq \frac{^-3}{2}$

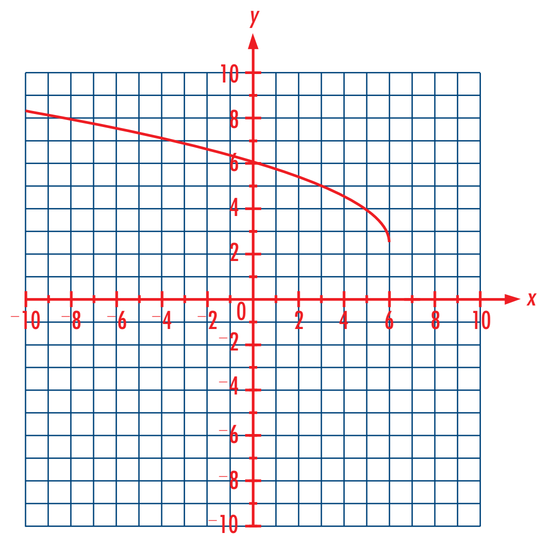
Une racine carrée doit être supérieure ou égale à 0 :

$\sqrt{\frac{^-3}{4}\left(x - 6\right)} \geq 0$

$\frac{^-3}{4}(x - 6) \geq 0$

$x - 6 \leq 0$

$x \leq 6$



e) $x = {^-4}$

$\frac{^-3}{4}\sqrt{4\left(x + 5\right)} + 4 = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$

$\frac{^-3}{4}\sqrt{4\left(x + 5\right)} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$

$\sqrt{4\left(x + 5\right)} = \frac{^-1}{3}x + \frac{2}{3}$

$3\sqrt{4\left(x + 5\right)} = {^-x} + 2$

$9\left(4\left(x + 5\right)\right) = \left({^-x} + 2\right)^2$

$36(x + 5) = x^2 - 4x + 4$

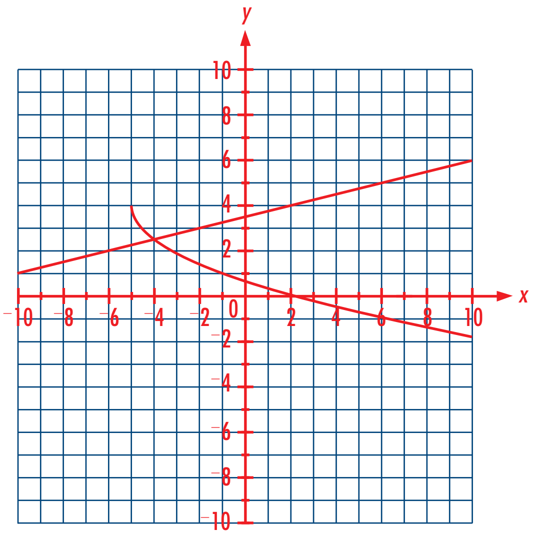
$36x + 180 = x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 40x - 176 = 0$

$(x - 44)(x + 4) = 0$

$x_1 = 44$

$x_2 = {^-4}$



Les réponses doivent respecter les restrictions suivantes :

$4(x+5) \geq 0$, c'est-à-dire que $x \geq {}^-5$

et ${}^-x+2 \geq 0$, c'est-à-dire que $x \leq 2$,

donc ${}^-5 \leq x \leq 2$.

$x_1 = 44$ est à rejeter.

Ou bien :

À l'aide du graphique, on voit que l'intersection recherchée est pour la plus petite valeur trouvée.

f) $x \in \left[{}^-6, 2\right]$

$3\sqrt{{}^-4x+12} - 7 \leq \frac{{}^-3}{2}x + 2$

$3\sqrt{{}^-4x+12} \leq \frac{{}^-3}{2}x + 9$

$6\sqrt{{}^-4x+12} \leq {}^-3x + 18$

$36({}^-4x+12) \leq ({}^-3x+18)^2$

${}^-144x + 432 \leq 9x^2 - 108x + 324$

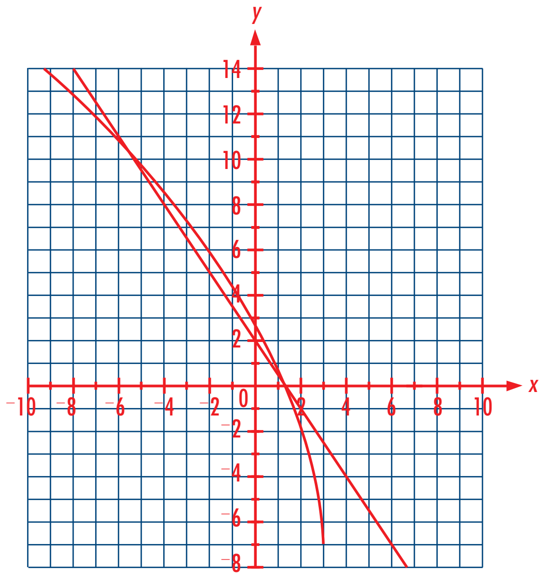
$0 \leq 9x^2 + 36x - 108x$

$0 \leq x^2 + 4x - 12$

$0 \leq (x-2)(x+6)$

La parabole associée à cette dernière inéquation a une concavité vers le haut et a pour zéros 2 et ${}^-6$.

Elle est donc positive sur les intervalles $]{}^-\infty, {}^-6]$ et $[2, {}^+\infty[$.



Cependant, en regardant le graphique, on constate que les images de la fonction racine carrée (terme de gauche de l'inéquation) sont plus petites que celles de la fonction affine (terme de droite de l'inéquation) pour le premier intervalle trouvé, $]{}^-\infty, {}^-6]$, mais le deuxième intervalle n'est pas correct, car le domaine de la fonction racine carrée est limité. Le deuxième intervalle doit se terminer au sommet de la fonction racine carrée, soit $[2, 3]$.

La solution est donc : $x \in \left[{}^-\infty, {}^-6\right] \cup \left[2, 3\right]$.

2e temps

Une démarche algébrique permet de calculer les valeurs exactes, mais il ne faut pas oublier que la fonction racine carrée est définie seulement pour les valeurs positives de l'expression contenue sous son radical. On doit donc vérifier si la ou les valeurs obtenues sont cohérentes avec le domaine et l'image de la fonction considérée.

Une représentation graphique de la fonction associée à l'équation ou à l'inéquation à résoudre permet souvent de valider un raisonnement algébrique.

CORRIGÉ, p. 85 (SN p. 87) (*suite*)

3e temps

Voir les réponses données au 2e temps.

CORRIGÉ, p. 91 (SN p. 93)

Exercices

16. a) S(4, 2)

b) S(⁻5, 15)

c) $S\left(\frac{4}{3}, 7\right)$

d) S(4, 2)

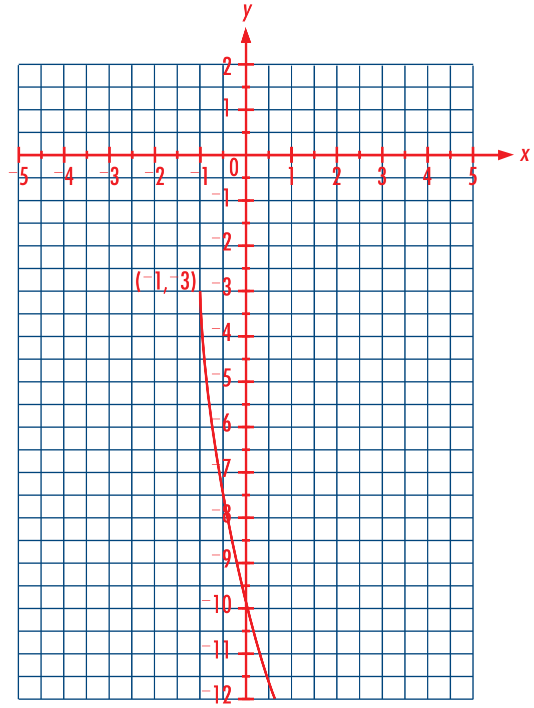
17. a) $a = \frac{9}{4}$

b) $h = 9$

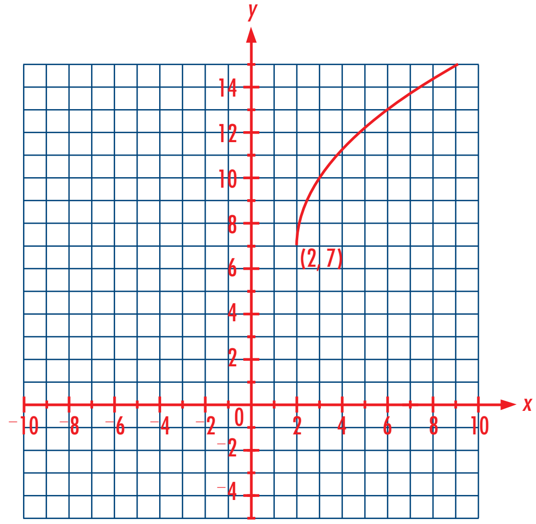
c) $k = 36$

d) $b = \frac{49}{8}$

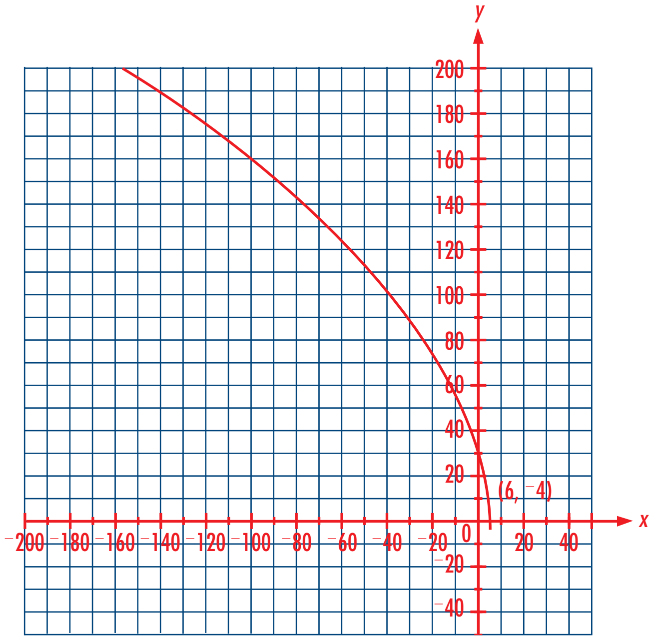
18. a)



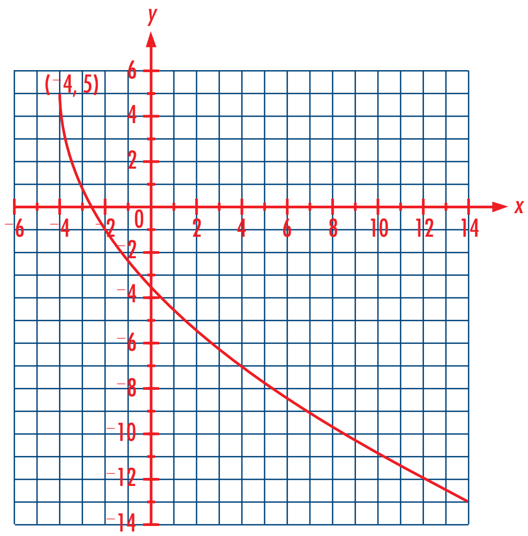
b)



c)



d)



19. a) 97

b) 1,25

c) $\frac{81}{8}$

d) Aucun zéro.

20. a) $y = {}^-8\sqrt{x + 4} + 6$

b) $y = {}^-21\sqrt{x - 2} + 4$

c) $y = 5\sqrt{2}\sqrt{x - 2} + 3$

d) $y = 5\sqrt{x - \frac{4}{25}} - 8$

21. a) ${}^-\sqrt{3} + 10$

b) $2\sqrt{5} - 5$

c) Aucune.

d) $3\sqrt{10} + 3$

CORRIGÉ, p. 92 (SN p. 94)

22. a) $y = 3\sqrt{x + 10} - 10$

b) $y = 5\sqrt{{}^{-}(x - 5)} - 10$

c) $y = {}^{-}4\sqrt{{}^{-}(x - 4)} + 6$

d) $y = {}^{-}3\sqrt{x + 4} + 6$

23. a) Décroissante sur $\left[{}^{-}3, {}^{+}\infty\right[$.

b) Décroissante sur $\left]{}^{-}\infty, 2\right]$.

c) Croissante sur $\left]{}^{-}\infty, {}^{-}1\right]$.

d) Décroissante sur $\left[2, +\infty\right[$.

24. a) Négative sur $\left]{}^{-}\infty, \frac{14}{5}\right]$ et positive sur $\left[\frac{14}{5}, 3\right]$.

b) Négative sur $\left[{}^{-}3, \frac{13}{4}\right]$ et positive sur $\left[\frac{13}{4}, {}^{+}\infty\right[$.

c) Positive sur $\left[4, {}^{+}\infty\right[$.

d) Négative sur $\left[{}^{-}10, {}^{+}\infty\right[$.

CORRIGÉ, p. 93 (SN p. 95)

Exercices (*suite*)

25. a) Maximum : 2

b) Minimum : 10

c) Minimum : 7

d) Minimum : $\frac{2}{3}$

26. a) Domaine : $\left]{}^{-}\infty, 2\right]$ et image : $\left]{}^{-}\infty, \frac{1}{2}\right]$.

b) Domaine : $\left]{}^{-}\infty, 1\right]$ et image : $\left[4, {}^{+}\infty\right[$.

c) Domaine : $\left[{}^{-}1, {}^{+}\infty\right[$ et image : $\left[2, {}^{+}\infty\right[$.

d) Domaine : $\left]{}^{-}\infty, 3\right]$ et image : $\left[10, {}^{+}\infty\right[$.

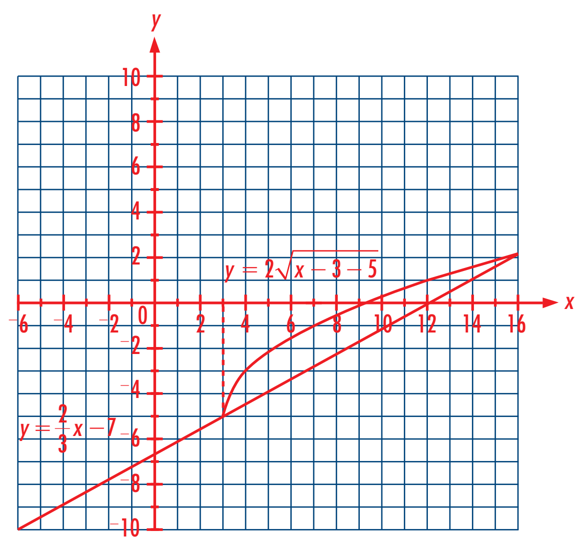
27. a) (1, 5)

b) Aucun point d'intersection.

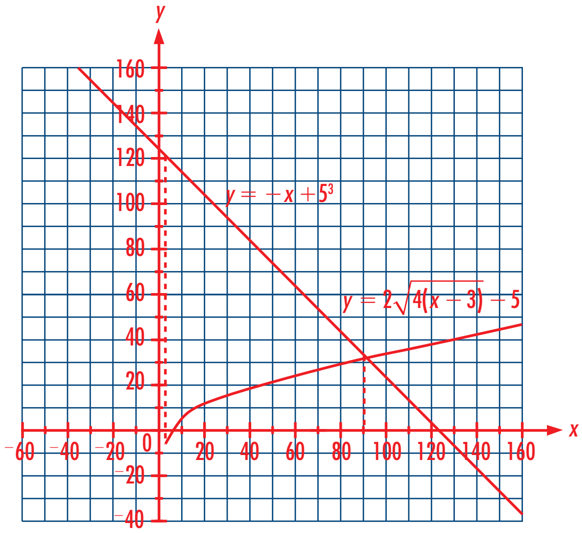
c) Aucun point d'intersection.

d) Aucun point d'intersection.

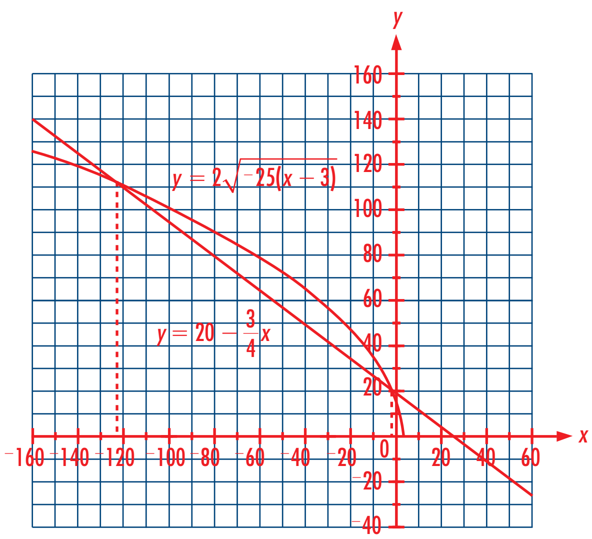
28. a) $\left[3, 12\right]$, soit l'intervalle dont les extrémités correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite ci-dessous.



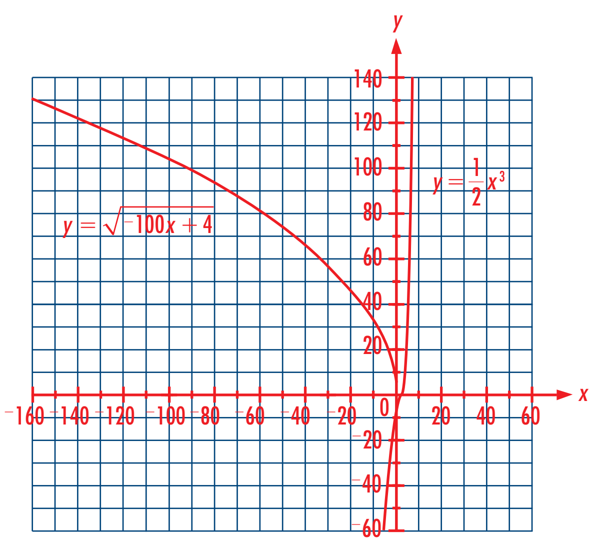
b) $\left[3,\ 138 - 4\sqrt{131}\right]$, soit l'intervalle dont les extrémités correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite ci-dessous.



c) $\left]\dfrac{^-560 - 40\sqrt{187}}{9},\ \dfrac{^-560 + 40\sqrt{187}}{9}\right[$, soit l'intervalle dont les extrémités correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite ci-dessous.



d) Aucune solution, comme on peut le voir sur le graphique ci-dessous.



CORRIGÉ, p. 93 (SN p. 95) (*suite*)

29. a) $y = 2\sqrt{{}^{-}(x-5)} - 6$

b) $y = {}^{-}2\sqrt{{}^{-}(x+2)} + 7$

c) $y = 4\sqrt{x+5} - 1$

d) $y = {}^{-}\sqrt{2}\sqrt{x+\frac{3}{2}} + 1$

CORRIGÉ, p. 94 (SN p. 96)

Exercices (*suite*)

30. Les équations peuvent être données sous une forme équivalente.

a) $f(x) = {}^{-}\sqrt{x-3}$

b) $f(x) = {}^{-}\sqrt{x+1} + 5$

c) $f(x) = {}^{-}2\sqrt{{}^{-}\left(x-\frac{1}{3}\right)}$

d) $f(x) = 3\sqrt{{}^{-}(x-1)} - 2$

e) $f(x) = \frac{1}{3}\sqrt{{}^{-}(x+2)} - 4$

f) $f(x) = {}^{-}2\sqrt{2}\sqrt{{}^{-}\left(x-\frac{5}{2}\right)} + 3$

g) $f(x) = \sqrt{\pi x}$

h) $f(x) = \sqrt{2}\sqrt{x+2} - 1$

31. a) $(50, {}^{-}1)$

b) Aucun point d'intersection.

c) Aucun point d'intersection.

d) Aucun point d'intersection.

e) $(3, 2)$

f) $\left(\frac{\sqrt{5}+3}{2}, \frac{\sqrt{5}+3}{2}\right)$

CORRIGÉ, p. 95 (SN p. 97)

Exercices (*suite*)

32. a) 1) Aucune solution.

2) $\left[2, {}^{+}\infty\right[$

3) Aucune solution.

4) $\left[2, {}^{+}\infty\right[$

5) Aucune solution.

b) 1) $x = 1$

2) $\left[1, {}^{+}\infty\right[$

3) $x = 1$

4) $\left]1, {}^{+}\infty\right[$

5) Aucune solution.

c) 1) $x = {}^{-}9$

2) $x = {}^{-}9$

3) $\left[{}^{-}9, {}^{+}\infty\right[$

4) Aucune solution.

5) $\left]{}^{-}9, {}^{+}\infty\right[$

d) 1) $x = {}^{-}4$

2) $]{}^{-}\infty, {}^{-}1]$

3) $x = {}^{-}4$

4) $]{}^{-}\infty, {}^{-}4[\cup]{}^{-}4, {}^{-}1]$

5) Aucune solution.

e) 1) $x = 3$

2) $]{}^{-}\infty, 3]$

3) $[3, 9]$

4) $]{}^{-}\infty, 3[$

5) $]3, 9]$

f) 1) $x = 7$

2) $[7, {}^{+}\infty[$

3) $[2, 7]$

4) $]7, {}^{+}\infty[$

5) $[2, 7[$

CORRIGÉ, p. 98

Consolidation (SN)

1. a) $t = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 19{,}6(^-c + y)}}{9{,}8}$

En effet, puisque $a = 9{,}8$:

$y = {}^-4{,}9t^2 + bt + c$

Il faut résoudre cette équation de degré deux :

$4{,}9t^2 - bt - c + y = 0.$

En utilisant la formule quadratique, on obtient :

$t = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 19{,}6(^-c + y)}}{9{,}8}.$

b) Le mobile atteindra une hauteur de 15 m pour la première fois après environ 0,53 seconde et, pour la deuxième fois, après environ 1,92 seconde.

$t = \dfrac{b \pm \sqrt{b^2 - 19{,}6(^-c + y)}}{9{,}8}$

$t = \dfrac{12 \pm \sqrt{12^2 - 19{,}6(^-10 + 15)}}{9{,}8}$

$t = \dfrac{12 \pm \sqrt{144 - 98}}{9{,}8}$

$t = \dfrac{12 \pm \sqrt{46}}{9{,}8}$

$t_1 \approx 1{,}92$

$t_2 \approx 0{,}53$

c) Après environ 1,22 seconde.

$h = \dfrac{^-b}{2a}$

$h = \dfrac{^-12}{^-9{,}8}$ seconde $\approx 1{,}22$ seconde

2. Non, Claudie ne devrait pas faire confiance au vendeur. Il lui suffit de choisir un appareil ayant une résolution minimale de 8,7 mégapixels.

Équation de la dimension du plus grand format imprimable (cm) en fonction de la résolution de l'appareil (mégapixels) :

$y = a\sqrt{x}$

On doit remplacer x et y par les coordonnées d'un point :

$11{,}58 = a\sqrt{1{,}3}$

$a \approx 10{,}16$

$y \approx 10{,}16\sqrt{x}$

Résolution de l'appareil si la dimension du plus grand format imprimable est supérieure ou égale à 30 cm.

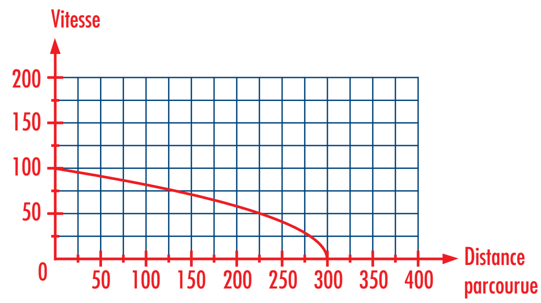
On doit résoudre l'inéquation suivante :

$30 \leq 10{,}16\sqrt{x}$

$2{,}95 \leq \sqrt{x}$

$x \geq 8{,}72$

3. a) $v = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}\sqrt{^-(d - 300)}$ pour $d \in [0, 300]$



CORRIGÉ, p. 98 (*suite*)

On doit trouver l'équation de la fonction :

$v = a\sqrt{^-(d - 300)}$.

On remplace x et y par les coordonnées du point (0, 100) :

$100 = a\sqrt{^-(0 - 300)}$

$a = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}$

Donc, $v = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}\sqrt{^-(d - 300)}$.

b) La vitesse à la moitié de la distance est d'environ 70,72 m/s et la vitesse aux trois quarts de la distance est de 50 m/s.

La moitié de la distance : $300 \div 2 = 150$ m

$v = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}\sqrt{^-(150 - 300)} \approx 70{,}71$ m/s

Les trois quarts de la distance : $\dfrac{3}{4} \cdot 300 = 225$ m

$v = \dfrac{10\sqrt{3}}{3}\sqrt{^-(225 - 300)} = 50$ m/s

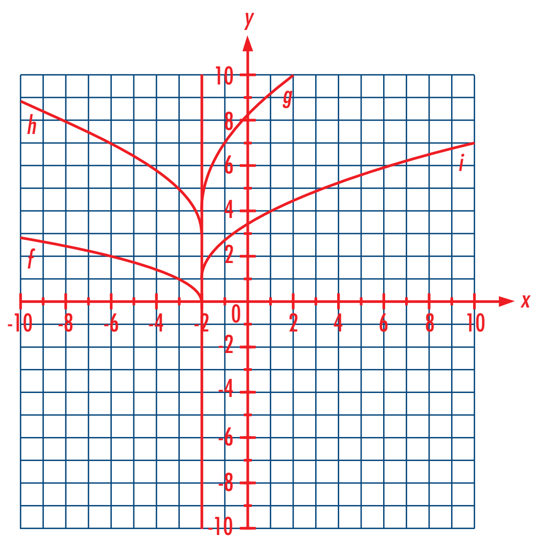
CORRIGÉ, p. 99

Consolidation (*suite*)

4. L'équation de la tige principale de la plante est : $x = {}^-2$.

Il faut déterminer les coordonnées des sommets des quatre fonctions :

$\mathbf{S}_f(^-2, 0)$, $\mathbf{S}_g(^-2, 4)$, $\mathbf{S}_h(^-2, 3)$ et $\mathbf{S}_i(^-2, 1)$. La tige passe donc par ces quatre points. C'est une droite verticale dont l'équation est $x = {}^-2$.



5. a) Non, il n'est pas possible de construire un triangle dans tous les cas.

Bien que les trois tiges aient la même longueur, on peut faire un triangle isocèle uniquement dans le cas où on substitue dans la formule les mesures exprimées en dm. Voici les calculs :

- pour $x = 100$ cm

$$\begin{array}{ccccccc} \sqrt{x} & + & \sqrt{x} & + & (x - 2\sqrt{x}) & = & 100 \\ \sqrt{100} & + & \sqrt{100} & + & (100 - 2\sqrt{100}) & = & 100 \\ 10 & + & 10 & + & 80 & = & 100 \\ a & + & b & + & c & = & 100 \end{array}$$

Ces mesures ne forment pas un triangle, car la condition $a + b > c$ n'est pas respectée.

- pour $x = 10$ cm

$$\begin{aligned}\sqrt{x} + \sqrt{x} + (x - 2\sqrt{x}) &= 10\\ \sqrt{10} + \sqrt{10} + (10 - 2\sqrt{10}) &= 10\\ 3{,}16 + 3{,}16 + 3{,}68 &= 10\\ a + b + c &= 10\end{aligned}$$

Ces mesures ne forment pas un triangle, car les trois conditions $a + b > c$, $b + c > a$ et $a + c > b$ sont respectées.

- pour $x = 1$ cm

$$\begin{aligned}\sqrt{x} + \sqrt{x} + (x - 2\sqrt{x}) &= 1\\ \sqrt{1} + \sqrt{1} + (1 - 2\sqrt{1}) &= 1\\ 1 + 1 + (^-1) &= 1\\ a + b + c &= 1\end{aligned}$$

Ces mesures ne forment pas un triangle car la mesure d'un côté ne peut pas être négative ($c = {}^-1$).

b) La longueur de la tige doit être supérieure à 4.

En effet, $\sqrt{x} + \sqrt{x} + x - 2\sqrt{x} = x$ unités de longueur

On a :

$a = \sqrt{x}$, $b = x - 2\sqrt{x}$ et $c = \sqrt{x}$.

Puisque les trois longueurs doivent être positives,

$a \geq 0$, $c > 0$ et $b > 0 \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} > 0$.

$x > 2\sqrt{x}$

$x^2 > 4x$

$x^2 - 4x > 0$

$x(x - 4) > 0$

$x > 4$.

On peut aussi vérifier qu'on a toujours $a + b > c$ et $b + c > a$, mais que $a + c > b$ pour $x < 16$. Il faut donc que x soit compris entre 4 et 16 pour qu'il soit possible de construire un triangle en respectant la consigne.

c) L'enseignant est blagueur, puisqu'il a donné trois cordes de même longueur, soit 1 m.

6. a) On a d'abord

$$c_2 = \frac{1}{2}\left(c_1 + \frac{10}{c_1}\right) = \frac{1}{2}\left(3 + \frac{10}{3}\right) = 3{,}166666667.$$

De même,

$$c_3 = \frac{1}{2}\left(c_2 + \frac{10}{c_2}\right) = 3{,}162280702,$$

$$c_4 = \frac{1}{2}\left(c_3 + \frac{10}{c_3}\right) = 3{,}162277660,$$

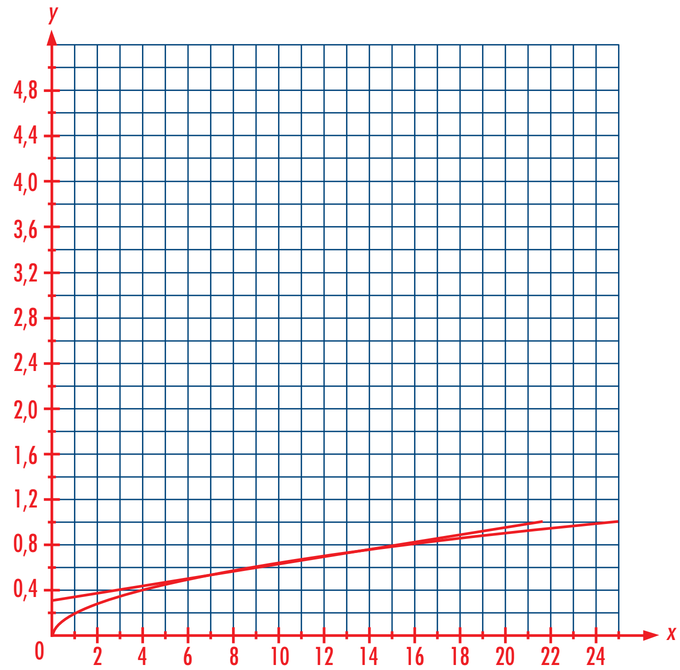
$$c_5 = \frac{1}{2}\left(c_4 + \frac{10}{c_4}\right) = 3{,}162277660.$$

Ainsi, au bout de trois utilisations de la formule, on obtient déjà 10 décimales exactes de $\sqrt{10}$.

De plus, on remarque que le nombre de décimales exactes double, à toutes fins utiles, à chaque étape.

CORRIGÉ, p. 99 (*suite*)

b) On a les graphiques suivants :



Il apparaît que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}\left(\sqrt{10} + \frac{x}{\sqrt{10}}\right)$ est tangente à la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ au point $\mathbf{P}\left(10, \sqrt{10}\right)$. Pour le prouver, il suffit de vérifier que pour tout $x \geq 0$, on a

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{10} + \frac{x}{\sqrt{10}}\right) \geq \sqrt{x},$$

l'égalité étant atteinte seulement lorsque $x = 10$. Cette inégalité est équivalente à $\left(\sqrt{10} + \frac{x}{\sqrt{10}}\right) \geq 2\sqrt{x}$.
En élevant au carré chaque membre, on a l'inégalité équivalente

$100 + 2x + \frac{x^2}{100} \geq 4x$, qui peut se réécrire $100 - 2x + \frac{x^2}{100} \geq 0$, c'est-à-dire $\left(\sqrt{10} - \frac{x}{\sqrt{10}}\right)^2 \geq 0$.

Comme le membre de gauche est un carré parfait, cette dernière inégalité est toujours vérifiée et on a l'égalité seulement si $\left(\sqrt{10} - \frac{x}{\sqrt{10}}\right) = 0$, c'est-à-dire $x = 10$.

Il aurait également été possible de calculer les coordonnées du point d'intersection des deux graphiques : les deux graphiques se rencontrent au point $(10, \sqrt{10})$.

En effet,

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{10} + \frac{x}{\sqrt{10}}\right) = \sqrt{x}$$

$$\left(\sqrt{10} + \frac{x}{\sqrt{10}}\right)^2 = \left(2\sqrt{x}\right)^2$$

$$10 + 2x + \frac{x^2}{10} = 4x$$

$$100 + 20x + x^2 = 40x$$

$$x^2 - 20x + 100 = 0$$

$$x = 10$$

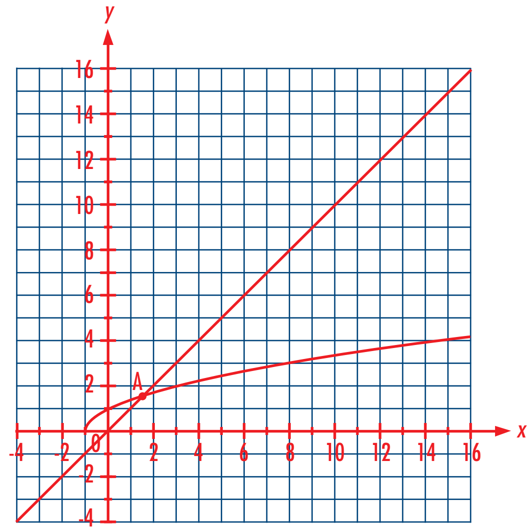
$$y = \sqrt{10}$$

Donc, l'abscisse correspond au nombre et l'ordonnée à la valeur de la racine carrée du nombre.

Consolidation (*suite*)

7. a) Le point d'intersection est : $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

Résolution graphique :



Résolution algébrique :

$x = \sqrt{x+1}$

$x^2 = x + 1$

$x^2 - x - 1 = 0$

$x^2 - x + \frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{4} = 0$

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

$x_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$x_2 = \frac{^-\sqrt{5}+1}{2}$

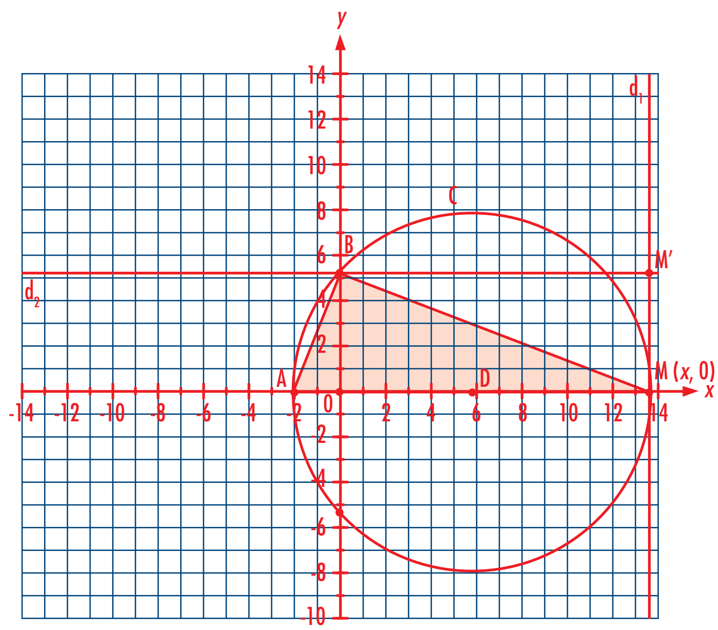
Puisque $x = \sqrt{x+1}$, $x_2 = \frac{^-\sqrt{5}+1}{2}$ est à rejeter, car cette valeur ne satisfait pas l'égalité.

Donc, le point d'intersection est : $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$.

b) $x_2 = \frac{^-\sqrt{5}+1}{2}$

(voir la démarche algébrique en **a)**)

8. a)



Oui, le triangle **ABM** est rectangle.

En effet, le point **D** est le milieu du segment **AM** et aussi le centre du cercle. On a **A**($^-2$, 0) et **M**(x, 0), donc les coordonnées du point **D** sont : **D**$\left(\frac{x-2}{2}, 0\right)$.

Les points **A**, **B** et **M** sont à égale distance du point **D**, le centre du cercle. Donc, on doit avoir :
$d(\mathbf{A},\mathbf{D}) = d(\mathbf{D},\mathbf{M}) = d(\mathbf{D},\mathbf{B})$.

La distance entre les points **D** et **M** est la différence des abscisses, donc le rayon du cercle est :

$$d(\mathbf{D},\mathbf{M}) = x - \frac{x-2}{2},$$

$$d(\mathbf{D},\mathbf{M}) = \frac{2x}{2} - \frac{x-2}{2},$$

$$d(\mathbf{D},\mathbf{M}) = \frac{2x - x + 2}{2},$$

$$d(\mathbf{D},\mathbf{M}) = \frac{x+2}{2}.$$

La distance entre les points **B** et **D** doit être égale au rayon du cercle. Si on pose que les coordonnées du point **B** sont **B**(0, y), on a alors :

$$d(\mathbf{D},\mathbf{M}) = d(\mathbf{B},\mathbf{D}) = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2},$$

$$\frac{x+2}{2} = \sqrt{\left(\frac{x-2}{2} - 0\right)^2 + \left(0 - y\right)^2},$$

$$\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 = \sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + y^2}.$$

En élevant au carré, on obtient

$$\frac{x+2}{2} = \left(\sqrt{\left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + y^2}\right)^2,$$

$$\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + y^2,$$

$$\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 = y^2,$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{4} - \left(\frac{x^2 - 4x + 4}{4}\right) = y^2,$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4 - x^2 + 4x - 4}{4} = y^2,$$

$$\frac{8x}{4} = y^2,$$

$$2x = y^2,$$

$$\pm\sqrt{2x} = y.$$

Les coordonnées du point **B** sont donc **B**$\left(0, \sqrt{2x}\right)$ ou bien **B′**$\left(0, {}^-\sqrt{2x}\right)$.

Calculons maintenant les expressions algébriques représentant les mesures des trois côtés du triangle **ABM** :

$d(\mathbf{A},\mathbf{M}) = x - (^-2) = x + 2$ (différence des abscisses, segment horizontal),

$$d(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

$$d(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \sqrt{\left(0 - {}^-2\right)^2 + \left(\sqrt{2x} - 0\right)^2}$$

$$d(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \sqrt{\left(2\right)^2 + \left(\sqrt{2x}\right)^2}$$

$$d(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \sqrt{4 + 2x},$$

$$d(\mathbf{B},\mathbf{M}) = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

$$d(\mathbf{B},\mathbf{M}) = \sqrt{\left(0 - x\right)^2 + \left(\sqrt{2x} - 0\right)^2}$$

$d(\mathbf{B},\mathbf{M}) = \sqrt{\left(^-x\right)^2 + \left(\sqrt{2x}\right)^2}$

$d(\mathbf{B},\mathbf{M}) = \sqrt{x^2 + 2x}.$

Selon la réciproque de la relation de Pythagore, si l'égalité suivante est vraie, alors le triangle est rectangle :

$(d(\mathbf{A},\mathbf{M}))^2 = (d(\mathbf{A},\mathbf{B}))^2 + (d(\mathbf{B},\mathbf{M}))^2,$

$\left(x+2\right)^2 = \left(\sqrt{4+2x}\right)^2 + \left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2,$

$x^2 + 4x + 4 = 4 + 2x + x^2 + 2x,$

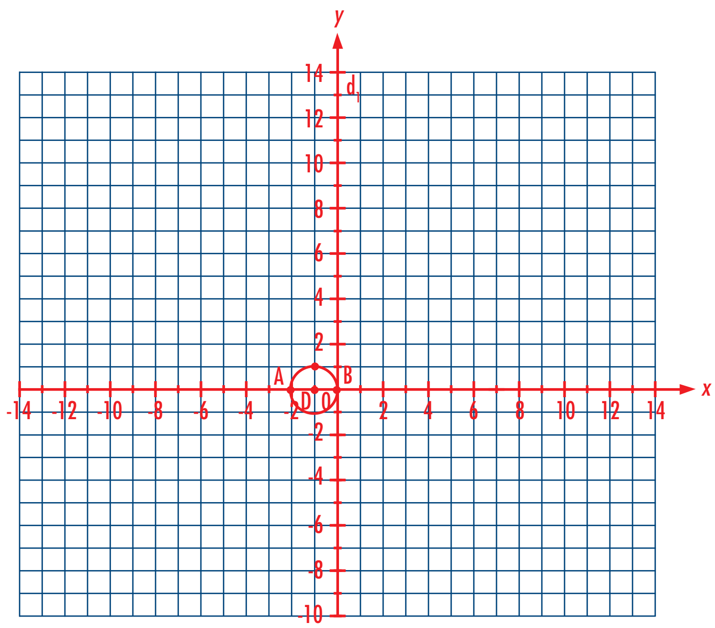
$x^2 + 4x + 4 = x^2 + 4x + 4.$

Cette égalité est vérifiée pour toutes les valeurs de x, donc le triangle **ABM** est rectangle.

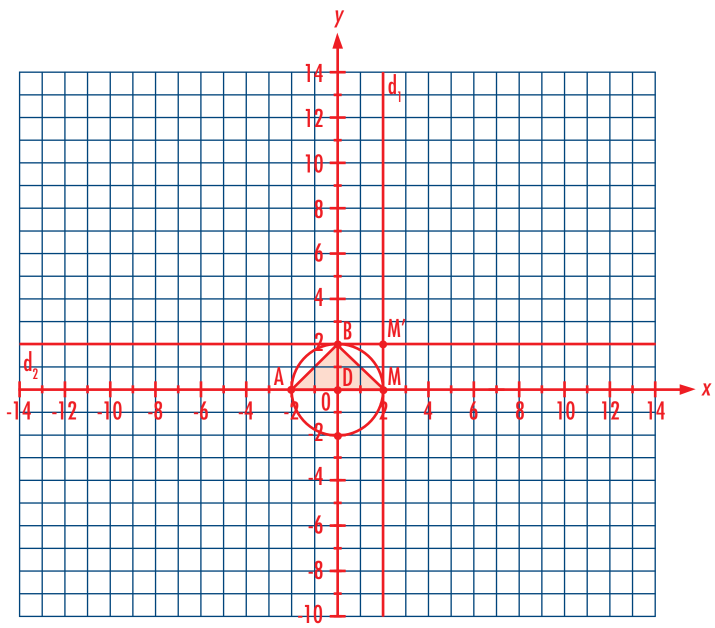
b) Le segment $\overline{\mathbf{MM'}}$ correspond à la hauteur issue de l'angle droit **B** du triangle.

c) Le déplacement du point **M** sur l'axe des abscisses entraîne un déplacement de **M′** dans le plan cartésien qui correspond à une fonction racine carrée.
En effet, voici différents graphiques selon les coordonnées des points **M** et **M′** :

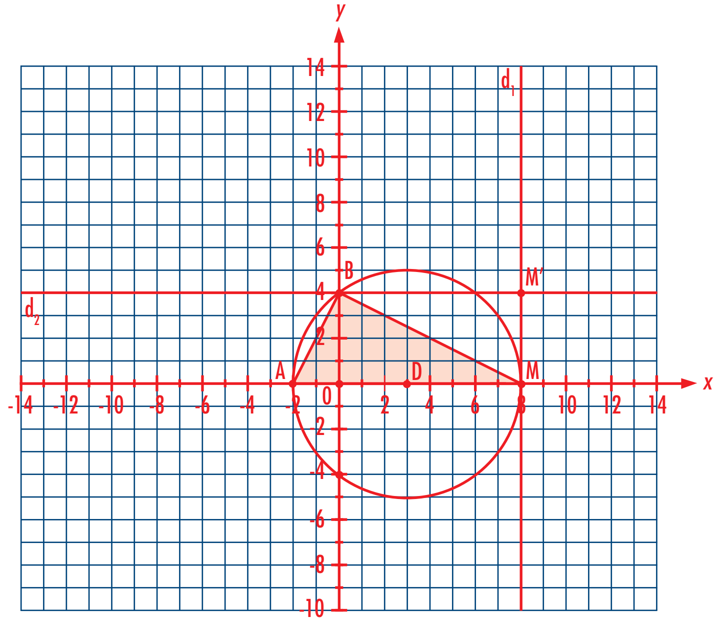
M(0, 0)
M′(0, 0)



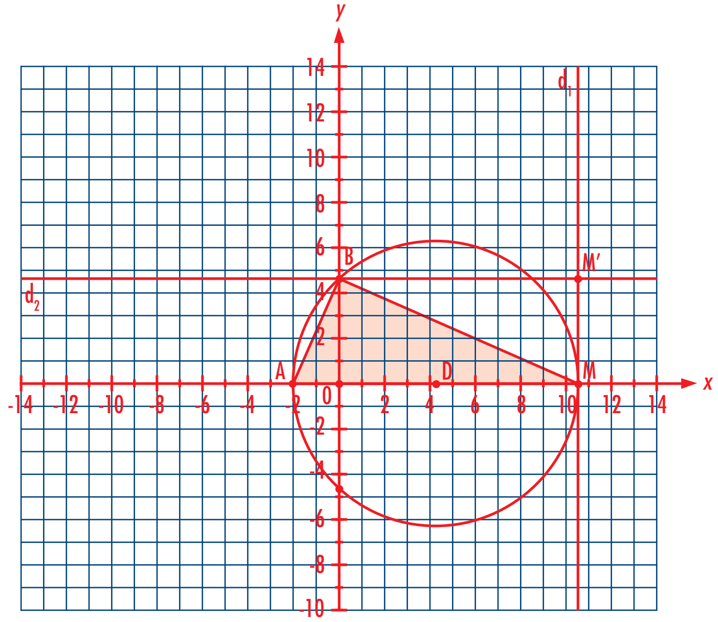
M(2, 0)
M′(2, 2)



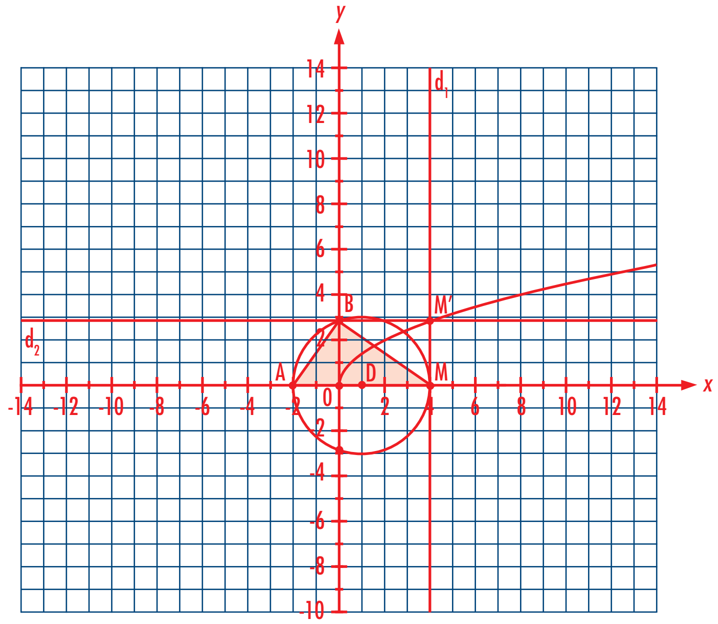
M(8, 0)
M'(8, 4)



M(10,6, 0)
M'(10,6, 4,6)



Voici le graphique correspondant au déplacement complet :



CORRIGÉ, p. 100 (*suite*)

d) L'équation est : $y = \sqrt{2x}$ ou toute autre équation équivalente.

Puisque la demi-parabole est à droite de son sommet, le paramètre b est positif.

Soit $b = 1$, on a

$y = a\sqrt{1(x-h)} + k.$

On remplace (h, k) par les coordonnées du sommet (0, 0) :

$y = a\sqrt{x}.$

On remplace (x, y) par les coordonnées d'un point sur la courbe et on isole le paramètre a.

Prenons **M'**(2, 2) comme point :

$2 = a\sqrt{2}$

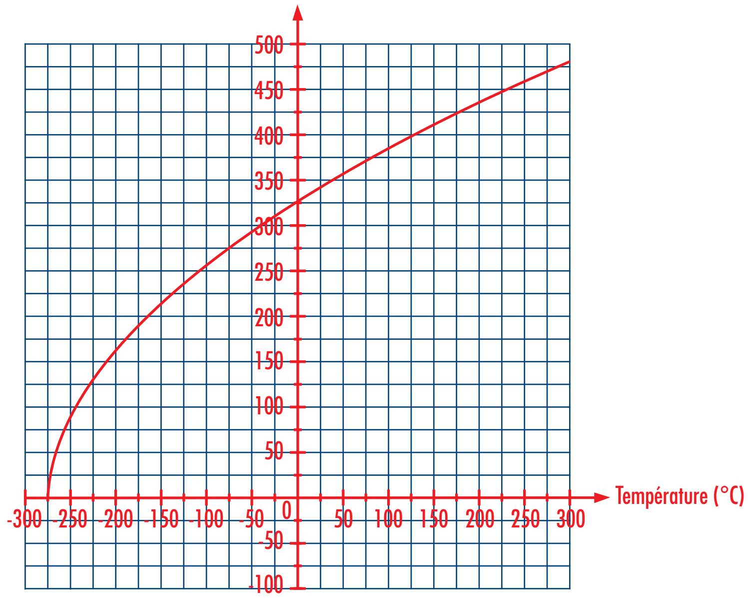
$a = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Donc, $y = \sqrt{2}\sqrt{x} = \sqrt{2x}.$

CORRIGÉ, p. 101

Consolidation (*suite*)

9. a) Vitesse du son dans l'air



Le domaine est $[{}^{-}273{,}15, {}^{+}\infty[$.

b) 0 m/s

c) $^{-}273{,}15$ °C

d) 331,3 m/s

$v(0) = 331\sqrt{1 + \frac{0}{273{,}15}}$

$v(0) = 331{,}3$

e) Environ 100 °C

$387{,}23 = 331\sqrt{1 + \frac{t}{273{,}15}}$

$t \approx 100$

f) La température dans l'air peut difficilement atteindre 4837,2 °C.

$1433 = 331\sqrt{1 + \frac{t}{273{,}15}}$

$t \approx 4837{,}20$

CORRIGÉ, p. 101 (*suite*)

10. a) Environ 2,01 s

$$P(1) = 2\pi\sqrt{\frac{1}{9,81}}$$
$$P(1) \approx 2,01$$

b) Environ 67 m

$$16,42 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9,81}}$$
$$L \approx 67$$

c) La longueur minimale est d'environ 39,24 m.

$$2\pi\sqrt{\frac{L}{9,81}} \geq 4\pi$$
$$L \geq 39,24$$

CORRIGÉ, p. 102

11. a) Environ 154,21 m/s

$$v = \left(1 + \frac{2}{0,01}\right)\sqrt{2(9,81)(0,03)}$$
$$v \approx 154,21$$

b) Environ 1,27 cm

$$200 = \left(1 + \frac{2}{0,005}\right)\sqrt{2(9,81)h}$$
$$h \approx 1,271\,\text{m}$$

c) Environ 6,28 g

$$100 = \left(1 + \frac{2}{m}\right)\sqrt{2(9,81)(0,005)}$$
$$m \approx 0,0628\,\text{kg}$$

d) Environ 187,60 m/s

1) Calcul de la hauteur h :

$$\cos 27,5 = \frac{h_1}{1}$$
$$h_1 \approx 0,8870$$
$$h = 1 - h_1$$
$$h \approx 1 - 0,8870$$
$$h \approx 0,113$$

2) Calcul de la vitesse :

$$v = \left(1 + \frac{2,5}{0,02}\right)\sqrt{2(9,81)(0,113)}$$
$$v \approx 187,60$$

e) La mesure de l'angle est d'environ 20°.

1) Calcul de la hauteur h :

$$300 = \left(1 + \frac{2}{0,00725}\right)\sqrt{2(9,81)h}$$
$$h \approx 0,0598$$

2) Calcul de la hauteur h_1 :

$$h_1 = 1 - h$$
$$h_1 = 1 - 0,0599 = 0,94$$

3) Calcul de la mesure de l'angle :

$\cos A = 0{,}94$

$m\ \angle A \approx \cos^{-1}(0{,}94) \approx 19{,}92°$

f) La masse minimale doit être de 28,54 kg.

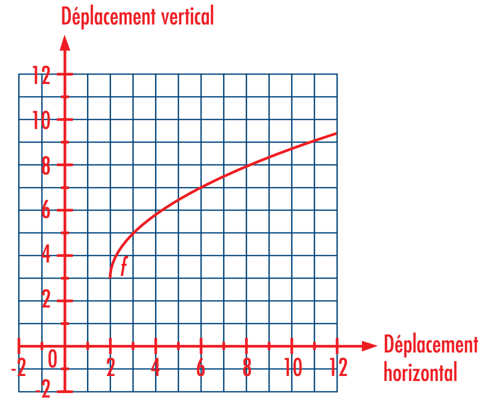
$$400 = \left(1 + \frac{M}{0{,}01}\right)\sqrt{2(9{,}81)0{,}001}$$

$M \approx 28{,}55$

Consolidation (*suite*)

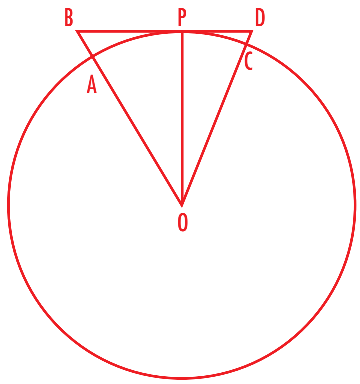
12. La courbe passe sur l'île de la Tête de chien et sur l'île Longue.

Elle passe par les points (6, 7) et (10, 8,66) qui sont respectivement situés sur l'île de la Tête de chien et sur l'île Longue.



Défi

13. a) Soit **O** le centre de la Terre, $\overline{\mathbf{AB}}$ le phare (**B** étant la lumière du phare), **C** la position du bateau et **D** l'œil de l'observateur. Alors, du point **D** (voir figure), on ne pourra plus voir le phare à partir du moment où le segment $\overline{\mathbf{BD}}$ sera tangent à la Terre.



Soit **P** ce point de tangence. Puisque le rayon de la Terre est très grand par rapport à $m\overline{\mathbf{AB}}$ et $m\overline{\mathbf{CD}}$, l'angle $\angle$**BOD** est très petit et la mesure de l'arc **AC** est pratiquement la même que celle du segment $\overline{\mathbf{BD}}$. Estimons donc la mesure de l'arc **AC** par la mesure du segment $\overline{\mathbf{BD}}$. Dans la figure, l'angle $\angle$**BOD** est exagérément grand, de façon à mieux voir les différents points **O**, **A**, **B**, **C**, **D**, **P**.

On a successivement, en mètres,

$$\begin{aligned} m\overline{\mathbf{BD}} &= m\overline{\mathbf{BP}} + m\overline{\mathbf{PD}} = \sqrt{m\overline{\mathbf{OB}}^2 - m\overline{\mathbf{OP}}^2} + \sqrt{m\overline{\mathbf{OD}}^2 - m\overline{\mathbf{OP}}^2} \\ &= \sqrt{(R+x)^2 - R^2} + \sqrt{(R+5)^2 - R^2} \\ &= \sqrt{(2R+x)x} + \sqrt{(2R+5)\cdot 5} \\ &\approx \sqrt{2Rx} + \sqrt{10R}, \end{aligned}$$

puisque x et 5 sont très petits par rapport à R. Étant donné que le bateau va à une vitesse de 50 km/h et que $R = 6\,370\,000$, le temps requis, en heures, est donc estimé par

$(3569{,}313660\sqrt{x} + 7981{,}227975)/50\,000$,

soit

$0{,}07138627320\sqrt{x} + 0{,}1596245595$.

Cette expression est de la forme $a\sqrt{b(x-h)} + k$ avec

$a = 0{,}07138627320,\ b = 1,\ h = 0,\ k = 0{,}1596245595$.

b) En posant $x = 10$ dans la formule trouvée en **a)**, on obtient que la lumière du phare ne sera plus visible de l'observateur à partir d'environ 0,3853677765 heure, soit 23,12206659 minutes.

Cependant, on peut déterminer ce temps avec plus de précision en calculant d'abord la longueur de l'arc **AC** à l'aide de rapports trigonométriques, comme suit :

$$\cos(\angle \mathbf{POB}) = \frac{\mathrm{m}\mathbf{OP}}{\mathrm{m}\mathbf{OB}} = \frac{R}{R+x} = \frac{6\,370\,000}{6\,370\,000 + x} = \frac{6\,370\,000}{6\,370\,010}$$

$$\cos(\angle \mathbf{POD}) = \frac{\mathrm{m}\mathbf{OP}}{\mathrm{m}\mathbf{OD}} = \frac{R}{R+5} = \frac{6\,370\,000}{6\,370\,000 + 5} = \frac{6\,370\,000}{6\,370\,005}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathrm{m}\angle\mathbf{AOC} &= \mathrm{m}\angle\mathbf{AOP} + \mathrm{m}\angle\mathbf{POC}\\ &= \arccos\left(\frac{6\,370\,000}{6\,370\,010}\right) + \arccos\left(\frac{6\,370\,000}{6\,370\,005}\right)\\ &= 0{,}1015251598° + 0{,}07178683776°\\ &= 0{,}1733119976°.\end{aligned}$$

Cet angle correspond à 0, 00048142 d'une circonférence complète. La longueur de l'arc **AC** est donc donnée, en km, par

$$\begin{aligned}0{,}00048142 \cdot 2\pi R &= 0{,}00048142 \cdot 2\pi \cdot 6370000\\ &= 19268{,}30132.\end{aligned}$$

Comme le bateau avance à une vitesse de 50 km/h, le temps requis est

de $19\,268{,}30132/50\,000$, soit 0,3853660264 heure.

En d'autres termes, ce temps est de 23,12196158 minutes.

L'estimation de 23,12206659 minutes trouvée en **a)** était donc excellente et on pouvait se passer de la trigonométrie pour résoudre ce problème de façon satisfaisante.

CORRIGÉ, p. 104

Autoévaluation

1. **a)** $y = 15\sqrt{^-(x-4)} + 7$

b) $y = {}^-4\sqrt{x-8} - 9$

2. **a)** Domaine : $\left[{}^-5, {}^+\infty\right[$.

Image : $\left]{}^-\infty, {}^-6\right]$.

Décroissante sur $\left[{}^-5, {}^+\infty\right[$.

b) Domaine : $\left]{}^-\infty, {}^-4\right]$.

Image : $\left[{}^-5, {}^+\infty\right[$.

Décroissante sur $\left]{}^-\infty, {}^-4\right]$.

3. **a)** Le zéro est $^-29$ et il n'y a pas d'ordonnée à l'origine.

b) Le zéro est $^-158$ et l'ordonnée à l'origine est $\dfrac{\sqrt{5}}{2} - 10$.

c) Il n'y a pas de zéro et l'ordonnée à l'origine est $\dfrac{^-7\sqrt{3} - 66}{12}$.

d) Le zéro est $\dfrac{206}{7}$ et il n'y a pas d'ordonnée à l'origine.

4. **a)** $y = {}^-3\sqrt{x+2} + 5$

b) $y = \dfrac{5}{2}\sqrt{^-(x-1)} - 5$

CORRIGÉ, p. 104 (*suite*)

5. a) Environ 749 469 habitants

En effet, au début de l'observation, le nombre d'années écoulées depuis le début de l'observation est de 0 année. Donc,

$p(0) = {}^{-}50\sqrt{0+2} + 749\,540.$

b) Sept années après le début de l'observation.

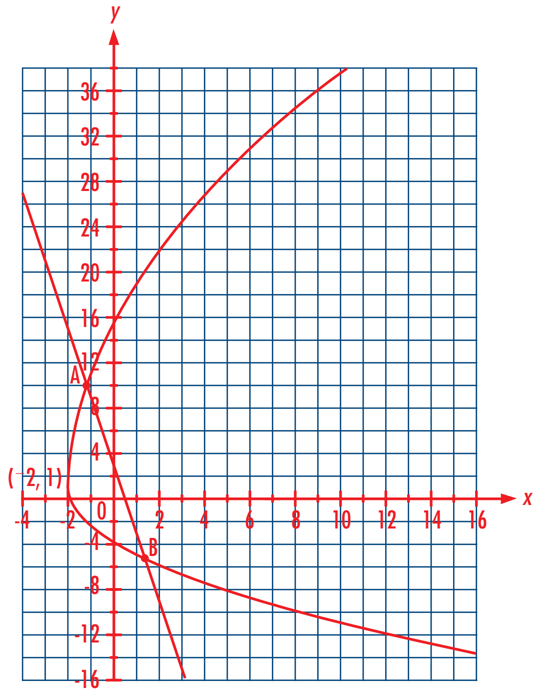
c) Environ 749 333 habitants.

CORRIGÉ, p. 105

Autoévaluation (*suite*)

6. $y = 4\sqrt{x+2} - 4$

7.



a) La chauve-souris localisera le hanneton et le moustique.

b) Pour les valeurs d'ordonnées comprises dans l'intervalle suivant $\left[4\sqrt{7}+1, {}^{-}2\sqrt{3}+1\right]$

c) 5,6 m

1) Il faut calculer les points d'intersection entre la droite et les fonctions racine carrée :

$^{-}6x + 3 = 4\sqrt{7(x+2)} + 1$

On obtient : $x = \frac{^{-}11}{9}$ et $y = {}^{-}6 \cdot \left(\frac{^{-}11}{9}\right) + 3 = \frac{31}{3}$,

Donc, les coordonnées sont **A**$\left(\frac{^{-}11}{9}, \frac{31}{3}\right)$.

Les coordonnées de **B** :

$^{-}6x + 3 = {}^{-}2\sqrt{3(x+2)} + 1$

On obtient : $x = \frac{3+\sqrt{29}}{6}$ et $y = \sqrt{29}$,

Donc, les coordonnées sont **B**$\left(\frac{3+\sqrt{29}}{6}, \sqrt{29}\right)$.

2) Il faut calculer la distance entre les deux points **A** et **B** :

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$d \approx 5{,}60$