MODULE 5
Les opérations sur les fonctions

CORRIGÉ, p. 144

Préparation

1. a) Ensemble vide : { } ou $\varnothing$.

$$^{-}2\sqrt{4x+5}=10$$
$$\sqrt{4x+5}={}^{-}5$$

Aucune solution, la racine carrée positive d'un nombre ne peut pas donner un résultat négatif.

b) Solution : $x={}^{-}0{,}74\overline{6}$.

$$5\sqrt{^{-}3x+8}+9=25$$
$$5\sqrt{^{-}3x+8}=16$$
$$\sqrt{^{-}3x+8}=3{,}2$$
$$^{-}3x+8=10{,}24$$
$$^{-}3x=2{,}24$$
$$x={}^{-}0{,}74\overline{6}.$$

c) Aucune solution.

$$^{-}3\left|x+8\right|=10$$
$$\left|x+8\right|=-\frac{10}{3}.$$

La valeur absolue d'un nombre ne peut pas être négative.

d) Solution : $x=4{,}5$ ou $x={}^{-}1$.

$$2\left|4x-7\right|-12=10$$
$$2\left|4x-7\right|=22$$
$$\left|4x-7\right|=11$$
$$4x-7=11 \quad \text{ou} \quad 4x-7={}^{-}11$$
$$4x=18 \qquad 4x={}^{-}4$$
$$x=\frac{18}{4}=4{,}5 \qquad x={}^{-}1.$$

e) Solution : $x\in\{^{-}3{,}5,\ 4\}$.

$$2x^2-x-23=5$$
$$2x^2-x-28=0$$
$$2x^2+7x-8x-28=0$$
$$x(2x+7)-4(2x-7)=0$$
$$(2x+7)(x-4)=0$$
$$x-4=0 \quad \text{ou} \quad 2x+7=0$$
$$x=4 \qquad x={}^{-}3{,}5.$$

f) Solution : $x\in\left\{\frac{^{-}15-\sqrt{593}}{8},\frac{^{-}15+\sqrt{593}}{8}\right\}$.

$$4x^2+7x-35={}^{-}8x-12$$
$$4x^2+15x-23=0$$
$$x=\frac{^{-}15\pm\sqrt{225-4(4)(^{-}23)}}{8}$$
$$x=\frac{^{-}15\pm\sqrt{593}}{8}$$
$$x_1=\frac{^{-}15+\sqrt{593}}{8}=1{,}1689$$
$$x_2=\frac{^{-}15-\sqrt{593}}{8}\approx{}^{-}4{,}9189.$$

g) Solution : $x = -\frac{73}{27} \approx {}^{-}2{,}7037$.

$$\begin{aligned} \frac{8}{x+3} + 15 &= 42 \\ \frac{8}{x+3} &= 27 \\ 8 &= 27x + 81 \\ {}^{-}27x &= 73. \end{aligned}$$

h) Solution : $x = \frac{76}{43} \approx 1{,}7674$.

$$\begin{aligned} \frac{5x+4}{2x-3} - 6 &= 18 \\ \frac{5x+4}{2x-3} &= 24 \\ 5x + 4 &= 48x - 72 \\ 76 &= 43x. \end{aligned}$$

2. a) $2x^2 - 2x - 48 = 2(x^2 - x - 24)$.

b) $x^2 + 12x - 45 = (x-3)(x+15)$, car :

$$\begin{aligned} x^2 + 12x - 45 &= x^2 - 3x + 15x - 45 \\ &= x(x-3) + 15(x-3) \\ &= (x-3)(x+15). \end{aligned}$$

c) $9x^2 - 25 = (3x+5)(3x-5)$.

d) $x^2 + 6x - 32 = \left(x + 3 + \sqrt{41}\right)\left(x + 3 - \sqrt{41}\right)$.

3. a) $\frac{{}^{-}6x^2 + 55x - 9}{{}^{-}x + 9} = 6x - 1$, si $x \neq 9$, car :

$$\begin{aligned} \frac{{}^{-}6x^2 + 55x - 9}{{}^{-}x + 9} &= \frac{{}^{-}6x^2 + 54x + x - 9}{{}^{-}x + 9} \\ &= \frac{6x({}^{-}x + 9) - 1({}^{-}x + 9)}{{}^{-}x + 9} \\ &= \frac{({}^{-}x + 9)(6x - 1)}{{}^{-}x + 9}, \text{ où } x \neq 9 \\ &= 6x - 1. \end{aligned}$$

b) $\frac{7x^2 - 15x + 2}{2x^2 - 8} = \frac{7x - 1}{2(x+2)}$, si $x \neq 2$ et $x \neq {}^{-}2$, car :

$$\begin{aligned} \frac{7x^2 - 15x + 2}{2x^2 - 8} &= \frac{7x^2 - x - 14x + 2}{2(x^2 - 4)} \\ &= \frac{x(7x-1) - 2(7x-1)}{2(x+2)(x-2)}, \text{ où } x \neq 2 \text{ et } x \neq {}^{-}2 \\ &= \frac{(x-2)(7x-1)}{2(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{7x-1}{2(x+2)}. \end{aligned}$$

c) $\frac{20x^2 - 76x + 21}{40x^2 + 38x - 15} = \frac{2x - 7}{4x + 5}$, si $x \neq \frac{3}{10}$ et $x \neq \frac{5}{4}$, car :

$$\begin{aligned} \frac{20x^2 - 76x + 21}{40x^2 + 38x - 15} &= \frac{20x^2 - 70x - 6x + 21}{40x^2 - 12x + 50x - 15} \\ &= \frac{10x(2x-7) - 3(2x-7)}{4x(10x-3) + 5(10x-3)} \\ &= \frac{(2x-7)(10x-3)}{(10x-3)(4x+5)}, \text{ si } x \neq \frac{3}{10} \text{ et } x \neq \frac{5}{4} \\ &= \frac{2x-7}{4x+5}. \end{aligned}$$

CORRIGÉ, p. 144 (*suite*)

4. a) $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V(r)}{4\pi}}$.

Démarche :

$$V(r) = \frac{4\pi r^3}{3}$$
$$3 \cdot V(r) = 4\pi r^3$$
$$\frac{3V(r)}{4\pi} = r^3.$$

b) $h = \dfrac{A(r)}{2\pi r} - r$.

Démarche :

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$
$$A(r) - 2\pi r^2 = 2\pi rh$$
$$h = \frac{A(r) - 2\pi r^2}{2\pi r}.$$

c) $x = \dfrac{5f(x)}{16} - 1$.

Démarche :

$$f(x) = \frac{16 + x}{5} + 3x$$
$$f(x) - 3x = \frac{16 + x}{5}$$
$$5f(x) - 15x = 16 + x$$
$$5f(x) - 16 = 16x.$$

d) $x = 3f(x) - 7$.

Démarche :

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 14}{3(x-2)}$$
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 7x - 14}{3(x-2)}$$
$$f(x) = \frac{x(x-2) + 7(x-2)}{3(x-2)}$$
$$f(x) = \frac{(x-2)(x+7)}{3(x-2)}$$
$$f(x) = \frac{(x+7)}{3}$$
$$3f(x) = x + 7.$$

CORRIGÉ, p. 145

Activité 1

L'enseignant ou l'enseignante assigne une des quatre situations à chaque élève en s'assurant de les répartir équitablement. Chaque élève doit résoudre sa situation avant de se placer en quatuor.

Situation 1

La compagnie ne subit pas de perte lorsque ses revenus sont supérieurs ou égaux à ses dépenses ou lorsque leur différence est supérieure ou égale à zéro.

$$r_b \geq d$$
$$r_b - d \geq 0$$
$$10{,}25q - (5{,}5q + 1875) \geq 0$$
$$4{,}75q - 1875 \geq 0$$
$$4{,}75q \geq 1875$$
$$q \geq 394{,}7368...$$

La compagnie ne subit pas de perte lorsqu'elle produit au moins 395 kg d'acier.

CORRIGÉ, p. 145 (*suite*)

Situation 2

Dans cette situation, la vitesse varie avec le temps. Donc, plus le temps passe, plus la vitesse de la particule augmente, et plus la distance franchie par la particule augmente aussi. Dans un mouvement uniformément accéléré, la distance totale franchie est donnée par l'équation suivante : $d = d_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v_f)\, s$, où d_0 est la distance initiale, v_0 la vitesse initiale et v_f la vitesse finale. La vitesse est donnée par l'équation $v = 5s + 25$. La vitesse initiale est obtenue en remplaçant s par zéro, donc $v_0 = 5(0) + 25 = 25$ et la distance initiale est 0. En substituant ces valeurs à d_0, v_0 et v_f dans l'équation qui donne la distance totale franchie, on obtient :

$$d = d_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v_f)\, s$$

$$d = 0 + \frac{1}{2}(25 + 5s + 25)\, s$$

$$d = \frac{1}{2}(5s + 50)\, s$$

$$d = \frac{1}{2}(5s^2 + 50\, s).$$

Après une minute (60 secondes), on sait que :

$$d = \frac{1}{2}(5(60)^2 + 50 \cdot 60)$$

$$d = \frac{1}{2}(5(3600) + 3000)$$

$$d = \frac{1}{2}(18\,000 + 3000)$$

$$d = \frac{1}{2}(21\,000)$$

$$d = 10\,500 \text{ m.}$$

Situation 3

La distance totale (d_t) parcourue par les extrémités des deux vérins correspond à la somme des distances parcourues par chacun d'eux :

$$d_t = d_1 + d_2$$

$$d_t = 0{,}10t + 0{,}08t$$

$$d_t = 0{,}18t.$$

On peut déterminer la distance totale parcourue par les deux vérins selon le temps en secondes à l'aide de l'équation :

$$d_t = 0{,}18t.$$

Situation 4

En isolant r dans la troisième formule, on obtient :

$$r = \frac{v}{i}$$

$$r = f(t) = \frac{2t + 10}{0{,}5t + 1}.$$

À l'aide de la division, on trouve la forme canonique d'une fonction rationnelle :

$$r = f(t) = 4 + \frac{6}{0{,}5t + 1} = 4 + \frac{6}{0{,}5(t + 2)} = 4 + \frac{12}{t + 2}.$$

Le début de l'observation correspond au temps 0 ($t = 0$). En remplaçant t par 0 dans l'équation précédente, on obtient :

$$r = f(0) = 4 + \frac{12}{0 + 2}$$

$$r = f(0) = 4 + 6 = 10.$$

Au début de l'observation, la résistance du circuit était de 10.

En remplaçant t par un nombre de plus en plus gros, on remarque que la résistance diminue peu à peu et tend vers 4 (en effet, $\frac{6}{0{,}5t + 1}$ tend vers 0 lorsque t augmente). Il s'agit de la valeur de l'asymptote horizontale de cette fonction rationnelle. On peut donc dire qu'il n'y aura jamais de plus petite résistance observée, car la résistance diminue toujours lorsque le temps augmente. La résistance s'approche de plus en plus de la valeur 4 sans jamais l'atteindre. L'élève peut aussi arriver à ce résultat en remplaçant t par différentes valeurs dans les deux premières équations, puis en calculant la résistance correspondante. Il ou elle pourra alors observer que les valeurs de r s'approchent de plus en plus de 4, sans jamais l'atteindre. L'élève peut aussi remarquer qu'il s'agit d'une fonction rationnelle probablement déjà étudiée.

CORRIGÉ, p. 145 (*suite*)

1er temps

a) Les quatre démarches utilisées pour résoudre les situations se ressemblent parce qu'elles impliquent des opérations sur des fonctions représentées par des équations du premier degré à deux variables.

Les opérations effectuées sur les fonctions sont différentes pour chaque situation. Dans la situation 1, on devait soustraire une fonction d'une autre.

Dans la situation 2, on devait substituer des valeurs et des expressions algébriques dans une équation calculant la distance totale franchie.

Dans la situation 3, on devait tout simplement additionner une fonction à une autre et simplifier les termes semblables afin d'obtenir une fonction résultante.

Dans la situation 4, une des façons de procéder impliquait une division de fonctions. Cette technique s'avère un peu plus compliquée, mais elle est plus efficace que le remplacement de plusieurs valeurs de la variable indépendante afin d'observer l'évolution de la variable dépendante.

b) Il était possible de résoudre les quatre situations en opérant sur les fonctions exprimées.

2e temps

Activité d'échange et de validation.

En groupe classe, les élèves peuvent comparer les résultats obtenus et discuter de la meilleure façon d'y arriver. Dans chacune des situations, les élèves pourraient constater que, après les opérations sur les fonctions de départ, on peut obtenir une fonction de la même famille que celle de départ (situations 1 et 3) ou bien une fonction d'une autre famille (situations 2 et 4).

CORRIGÉ, p. 146

Activité 2

a)

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{^{-}2t+48}+\frac{1}{i}=\frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{i}=\frac{1}{24}-\frac{1}{^{-}2t+48}$$

$$\frac{1}{i}=\frac{1}{24}-\frac{1}{^{-}2(t-24)}$$

$$\frac{1}{i}=\frac{1}{24}+\frac{1}{2(t-24)}$$

$$\frac{1}{i}=\frac{1}{24}\cdot\frac{t-24}{t-24}+\frac{1}{2(t-24)}\cdot\frac{12}{12}$$

$$\frac{1}{i}=\frac{t-24+12}{24(t-24)}$$

$$\frac{1}{i}=\frac{t-12}{24(t-24)}$$

$$i=\frac{24(t-24)}{t-12}.$$

b) L'équation trouvée en **a)** représente une fonction rationnelle.

c) Si $t=0$,

$$i=\frac{24(0-24)}{0-12}$$

$$i=\frac{^{-}576}{^{-}12}$$

$$i=48.$$

Au début de l'expérience, la distance i entre l'image et la lentille est de 48 cm.

d) À l'aide d'une calculatrice à affichage graphique, d'un logiciel traceur de courbes sur l'ordinateur ou d'une table de valeurs, on peut tracer la fonction i et ainsi observer la variation de la distance i en fonction du temps.

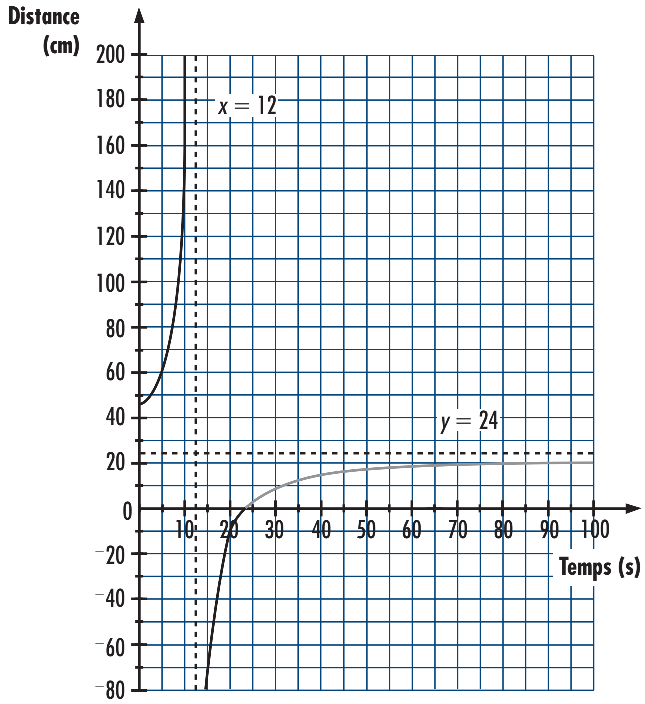
Interprétation de la distance i (en cm) en fonction du temps (en secondes) : au début, la distance entre le centre de la lentille et l'image de l'objet est de 48 cm. Ensuite, cette distance augmente rapidement pour atteindre plus de 300 cm après 11 secondes.

À exactement 12 secondes, la distance i est impossible à calculer (l'image ne peut pas apparaître, car l'objet est situé au foyer de la lentille).

CORRIGÉ, p. 146 (*suite*)

À partir de plus de 12 secondes, la distance *i* devient négative. À 13 secondes ($t = 13$) par exemple, la distance *i* est de $^{-}264$ cm. La distance *i* reste négative jusqu'à 24 secondes où elle est alors nulle (si $t = 24$, $i = 0$). C'est à cet instant que la distance entre l'objet et la lentille devient nulle ($o = 0$) elle aussi. En pratique, cette distance ne peut pas être atteinte, car la lentille et l'objet ont une épaisseur qui n'est pas nulle. Il serait intéressant de vérifier si les élèves ont pensé à cette limite lors de la partie f).

La partie du graphique à droite de 24 secondes devrait être jugée impossible, car l'objet ne peut pas passer à travers la lentille et la distance entre l'objet et la lentille (*o*) ne peut pas être négative.



e) L'image devient virtuelle après 12 secondes ($t > 12$) et elle le restera tant que le temps n'atteint pas 24 secondes ($t < 24$).

L'image est virtuelle lorsque la valeur de *i* est strictement négative, ce qui est relié au signe de la fonction. La fonction *i* est strictement négative si $t \in \,]12, 24[$.

f) En groupe classe, les élèves peuvent discuter de leurs résultats et des méthodes qu'ils et elles ont utilisées pour les obtenir. Il serait intéressant d'insister sur la signification des asymptotes de la fonction *i* dans cette situation.

CORRIGÉ, p. 147

Activité 3

1^er^ temps

a) $f(x) = 1{,}05x$, où x représente la valeur du total partiel 1 et $f(x)$ représente la valeur du total partiel 2.

Cette fonction est une fonction affine (et linéaire).

b) $g(x) = 1{,}075x$, où x représente la valeur du total partiel 2 et $g(x)$ représente le total à payer.

Cette fonction est aussi une fonction affine (et linéaire).

c) $h(x) = 1{,}075(1{,}05x)$, où x représente la valeur du total partiel 1 et $h(x)$ représente le total à payer.

Cette fonction est aussi une fonction affine (et linéaire).

d) Pour obtenir la fonction *h* (définie en **c)**), il suffit d'appliquer la fonction *g* à la fonction *f*. En d'autres mots, on doit d'abord appliquer la fonction *f*, puis substituer le résultat obtenu dans la fonction *g*. Algébriquement, on obtient :

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1{,}05x) = 1{,}075(1{,}05x) = 1{,}12875x.$

2^e^ temps

e) Non, le montant des deux taxes à payer n'est pas équivalent à celui qu'il faudrait payer si l'on appliquait une seule taxe de 12,5 % au total partiel 1. En effet, en **d)**, on constate qu'appliquer les deux taxes l'une à la suite de l'autre revient à appliquer une taxe totale de 12,875 % et non de 12,5 %. Cette différence est due au fait que la deuxième taxe est alors calculée sur le total partiel 2 (qui comprend déjà la première taxe) et non sur le total partiel 1.

CORRIGÉ, p. 147 (*suite*)

f) Non, la somme totale à payer ne serait pas différente si la TVQ était calculée en premier. La fonction h serait définie par : $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1{,}075x) = 1{,}05(1{,}075x) = 1{,}12875x$. Cette équation est exactement la même que celle obtenue précédemment en appliquant d'abord la TPS. En appliquant la TVQ en premier, le total partiel 2 ne serait pas le même, mais le total à payer serait inchangé.

CORRIGÉ, p. 148

Activité 4

1er temps

a) **Graphique 1**

Fonctions impliquées : $f(x) = |x|$

$g(x) = \sqrt{x}$.

Composée : $h(x) = (g \circ f)(x) = \sqrt{|x|}$.

Graphique 2

Fonctions impliquées : $f(x) = \dfrac{1}{x}$

$g(x) = |x|$.

Composée : $h(x) = (g \circ f)(x) = \left|\dfrac{1}{x}\right|$.

Graphique 3

Fonctions impliquées : $f(x) = x^2 - 9$

$g(x) = |x|$.

Composée : $h(x) = (g \circ f)(x) = |x^2 - 9|$.

b) Si l'on inversait l'ordre des fonctions impliquées dans la composée en **a)**, le graphique ne serait pas toujours le même. La composition de fonctions n'est pas commutative.

Pour le graphique 1, $(f \circ g)(x) = \left|\sqrt{x}\right|$, ce qui correspond au graphique de la fonction $g(x) = \sqrt{x}$ dans le plan cartésien.

Pour le graphique 2, $(f \circ g)(x) = \dfrac{1}{|x|} = \left|\dfrac{1}{x}\right| = (g \circ f)(x)$. Dans ce cas-ci, les fonctions f et g sont interchangeables, puisque la composée reste la même.

Pour le graphique 3, $(f \circ g)(x) = |x|^2 - 9$, ce qui correspond au graphique de la fonction $f(x) = x^2 - 9$ dans le plan cartésien.

c) Samuel n'a pas raison. Si l'on effectue des additions, des soustractions ou des compositions n'impliquant que des fonctions affines, on obtient toujours des fonctions affines comme résultat. Par contre, si l'on effectue des multiplications ou des divisions de fonctions affines, on n'obtient pas de fonctions affines.

Voyons les exemples suivants :

$f(x) = 3x + 2$ et $g(x) = {}^-5x - 4$

$(f + g)(x) = 3x + 2 + {}^-5x - 4$

$= {}^-2x - 2$ est une fonction affine.

$(f - g)(x) = 3x + 2 - ({}^-5x - 4)$

$= 8x + 6$ est une fonction affine.

$(f \circ g)(x) = 3({}^-5x - 4) + 2$

$= {}^-15x - 12 + 2$

$= {}^-15x - 10$ est une fonction affine.

$(f \cdot g)(x) = (3x + 2)({}^-5x - 4)$

$= {}^-15x^2 - 12x - 10x - 8$

$= {}^-15x^2 - 22x - 8$ n'est pas une fonction affine, mais une fonction polynomiale du 2e degré (parabole).

$(f \div g)(x) = \dfrac{3x + 2}{{}^-5x - 4}$ n'est pas une fonction affine, mais une fonction rationnelle.

2e temps

Activité d'échange et de validation.

En dyade, les élèves peuvent comparer les résultats qu'ils et elles ont obtenus au 1er temps. En mettant leurs réponses en commun, ils et elles devraient arriver à des explications plus complètes. En groupe classe, les élèves devraient pouvoir faire ressortir les apprentissages ciblés et généraliser les démarches.

CORRIGÉ, p. 148 (*suite*)

10. a) 1) $f + g = (3x - 12) + (x^2 - x - 12)$
$= x^2 + 2x - 24.$

2) $g - f = x^2 - x - 12 - (3x - 12)$
$= x^2 - x - 3x - 12 + 12$
$= x^2 - 4x.$

3) $g \div f = \dfrac{x^2 - x - 12}{3x - 12}$, où $x \neq 4$
$= \dfrac{1}{3}x + 1$ (obtenu par la division de polynômes).

4) $f \circ g = 3(x^2 - x - 12) - 12$
$= 3x^2 - 3x - 36 - 12$
$= 3x^2 - 3x - 48.$

5) $f \circ h = 3\left(3\sqrt{2x + 1} + 5\right) - 12$
$= 9\sqrt{2x + 1} + 15 - 12$
$= 9\sqrt{2x + 1} + 3.$

6) $h \circ f = 3\sqrt{2(3x - 12) + 1} + 5$
$= 3\sqrt{6x - 24 + 1} + 5$
$= 3\sqrt{6x - 23} + 5.$

7) $f \circ p = 3\left({}^{-}2\left|x - 5\right| + 1\right) - 12$
$= {}^{-}6\left|x - 5\right| + 3 - 12$
$= {}^{-}6\left|x - 5\right| - 9.$

8) $p \circ f = {}^{-}2\left|(3x - 12) - 5\right| + 1$
$= {}^{-}2\left|3x - 17\right| + 1$
$= {}^{-}2\left|3\left(x - \dfrac{17}{3}\right)\right| + 1.$

b) 1) Domaine de $f + g$: $\mathbb{R}$.

2) Domaine de $g - f$: $\mathbb{R}$.

3) Domaine de $g \div f$: $\mathbb{R}$ $\{4\}$.

4) Domaine de $f \circ h$: $\mathbb{R}$.

5) $(f \circ h)(x) = 9\sqrt{2x + 1} + 3$
$= 9\sqrt{2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)} + 3$

Domaine de $f \circ h$: $\left[{}^{-}\dfrac{1}{2}, {}^{+}\infty\right[$.

6) $(h \circ f)(x) = 3\sqrt{6x - 23} + 5$
$= 3\sqrt{6\left(x - \dfrac{23}{6}\right)} + 5$

Domaine de $h \circ f$: $\left[\dfrac{23}{6}, {}^{+}\infty\right[$.

7) Domaine de $f \circ p$: $\mathbb{R}$.

8) Domaine de $p \circ f$: $\mathbb{R}$.

CORRIGÉ, p. 156

Exercices

1. a) $h(x) = 4x - 1$, car :

$f(x) + g(x) = (3x + 2) + (x - 3)$
$= 4x - 1.$

b) $h(x) = 2x + 5$, car :

$f(x) - g(x) = (3x + 2) - (x - 3)$
$= 3x + 2 - x + 3$
$= 2x + 5.$

c) $h(x) = 3x^2 - 7x - 6$, car:

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= (3x+2)(x-3) \\ &= 3x^2 - 9x + 2x - 6 \\ &= 3x^2 - 7x - 6. \end{aligned}$$

d) $h(x) = \dfrac{3x+2}{x-3}$, où $x \neq 3$,

ou $h(x) = 3 + \dfrac{11}{x-3}$ (obtenu par la division des polynômes $\dfrac{f(x)}{g(x)}$).

2. a) $h(x) = x + x^2$

ou $h(x) = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$ (obtenu par la complétion du carré).

b) $h(x) = x - x^2$

ou $h(x) = -\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}$ (obtenu par la complétion du carré).

c) $h(x) = x \cdot x^2$

$= x^3$.

d) $h(x) = \dfrac{x}{x^2}$

$= \dfrac{1}{x}$, où $x \neq 0$.

3. a) $h(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$.

b) $h(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$.

c) $h(x) = x \cdot \sqrt{x^2 - 1}$.

d) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$, où $x \neq 1$.

4. a) $h(x) = \dfrac{1}{x} + x^2 + x - 3$

$= \dfrac{1 + x^3 + x^2 - 3x}{x}$, où $x \neq 0$.

b) $h(x) = \dfrac{1}{x} - \left(x^2 + x - 3\right)$

$= \dfrac{1}{x} - x^2 - x + 3$

$= \dfrac{1 - x^3 - x^2 + 3x}{x}$, où $x \neq 0$.

c) $h(x) = \dfrac{1}{x} \cdot (x^2 + x - 3)$

$= \dfrac{x^2 + x - 3}{x}$, où $x \neq 0$

ou $h(x) = x + 1 - \dfrac{3}{x}$.

d) $h(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{x^2 + x - 3}$

$= \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{x^2 + x - 3}$

$= \dfrac{1}{x^3 + x^2 - 3x}$.

5. a) $(f+g)(3) = 36$.

Démarche :

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= x + 3 + 2x^2 + 5x - 3 \\ &= 2x^2 + 6x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f+g)(3) &= 2 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 \\ &= 2 \cdot 9 + 18 \\ &= 18 + 18 \\ &= 36. \end{aligned}$$

b) $(f \cdot g)(^-1) = {}^-12.$

Démarche :

$$(f \cdot g)(x) = (x + 3)(2x^2 + 5x - 3)$$
$$\begin{aligned}(f \cdot g)(^-1) &= (^-1 + 3)\big(2 \cdot (^-1)^2 + 5(^-1) - 3\big)\\ &= 2(2 \cdot 1 - 5 - 3)\\ &= 2(2 - 5 - 3)\\ &= 2(^-6)\\ &= {}^-12.\end{aligned}$$

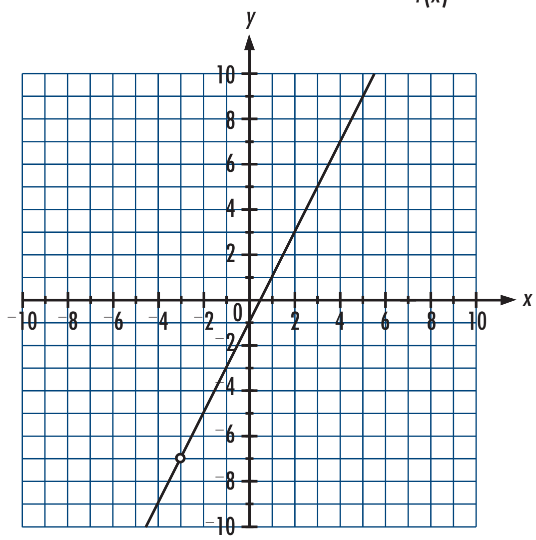
c) $(f \div g)(2) = \frac{1}{3}.$

Démarche :

$$(f \div g)(x) = \frac{x + 3}{2x^2 + 5x - 3}$$
$$\begin{aligned}(f \div g)(2) &= \frac{2 + 3}{2 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 - 3}\\ &= \frac{5}{2 \cdot 4 + 10 - 3}\\ &= \frac{5}{8 + 10 - 3}\\ &= \frac{5}{15}\\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

d) $h(x) = (g \div f)(x) = \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3}$, où $x \neq {}^-3$.

$h(x) = 2x - 1$ (obtenu par la division des polynômes $\frac{g(x)}{f(x)}$).



Propriétés : Domaine : $\mathbb{R} \setminus \{^-3\}$.

Image : $\mathbb{R} \setminus \{^-7\}$.

Zéro : 0,5.

Ordonnée à l'origine : $^-1$.

La fonction h est croissante sur tout son domaine.

$h(x) \geq 0$ si $x \in [0{,}5, {}^+\infty[$.

$h(x) \leq 0$ si $x \in\,]^-\infty, \cup\,]^-3,\ 0{,}5]$.

La fonction h n'a pas d'extremum.

6. a) $f \div g$ ou $g \div f$

$$\frac{\sqrt{16 - x^2}}{^-\sqrt{16 - x^2}} = \frac{^-\sqrt{16 - x^2}}{\sqrt{16 - x^2}} = {}^-1$$

b) $g - f$

$$^-\sqrt{16 - x^2} - \sqrt{16 - x^2} = {}^-2\sqrt{16 - x^2}.$$

c) $f \cdot g$ ou $g \cdot f$

$$\text{-}\sqrt{16 - x^2} \cdot {}^-\sqrt{16 - x^2} = {}^-\sqrt{16 - x^2} \cdot \sqrt{16 - x^2} = {}^-(16 - x^2) = x^2 - 16.$$

Exercices (*suite*)

7. a) 1) $(f\circ g)(x)=6\left(\dfrac{x+5}{2}\right)-11$

$=\dfrac{6x+30}{2}-11$

$=3x+15-11$

$=3x+4.$

2) $(f\circ g)(0)=3(0)+4$

$=0+4$

$=4.$

3) $(g\circ f)(^-3)=\dfrac{\left(6(^-3)-11\right)+5}{2}$

$=\dfrac{^-18-11+5}{2}$

$=\dfrac{^-24}{2}$

$=\,^-12.$

b) 1) $(f\circ g)(x)=8\left(x^2+x+1\right)-2$

$=8x^2+8x+8-2$

$=8x^2+8x+6.$

2) $(f\circ g)(0)=8\cdot 0^2+8\cdot 0+6$

$=0+0+6$

$=6.$

3) $(g\circ f)(^-3)=(8(^-3)-2)^2+(8(^-3)-2)+1$

$=(^-24-2)^2+(^-24-2)+1$

$=(^-26)^2-26+1$

$=676-26+1$

$=651.$

c) 1) $(f\circ g)(x)=(3x^2-2x-6)^2+(3x^2-2x-6)-4$

$=(9x^4-6x^3-18x^2-6x^3+4x^2+12x-18x^2+12x+36)+3x^2-2x-6-4$

$=9x^4-12x^3-29x^2+22x+26.$

2) $(f\circ g)(0)=9\cdot 0^4-12\cdot 0^3-29\cdot 0^2+22\cdot 0+26$

$=0-0-0+0+26$

$=26.$

3) $(g\circ f)(^-3)=3\left((^-3)^2+{}^-3-4\right)^2-2\left((^-3)^2+{}^-3-4\right)-6$

$=3(9-7)^2-2(9-7)-6$

$=3\cdot 2^2-2\cdot 2-6$

$=12-4-6$

$=2.$

8. a) $f^{-1}(x)=3x+2.$

Démarche :

$x=\dfrac{y-2}{3}$

$3x=y-2$

$y=3x+2.$

b) $f\circ f^{-1}(x)=x.$

Démarche :

$f\circ f^{-1}(x)=\dfrac{\left(3x+2\right)-2}{3}$

$=\dfrac{3x}{3}.$

c) $f^{-1} \circ f(x) = x$.

Démarche :

$$f^{-1} \circ f(x) = 3\left(\frac{x-2}{3}\right) + 2$$
$$= x - 2 + 2.$$

9. $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.

Soit $g(x) = ax + b$.

On sait que $(g \circ f)(x) = a(3x + 5) + b = x + 1$

$$3ax + 5a + b = x + 1.$$

Alors, $3a = 1$ et $5a + b = 1$

$a = \frac{1}{3}$ $\qquad 5\left(\frac{1}{3}\right) + b = 1$

$$b = 1 - \frac{5}{3}$$
$$b = -\frac{2}{3}.$$

Donc, $g(x) = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$.

10. a) 1) $f + g = (3x - 12) + (x^2 - x - 12)$
$= x^2 + 2x - 24.$

2) $g - f = x^2 - x - 12 - (3x - 12)$
$= x^2 - x - 3x - 12 + 12$
$= x^2 - 4x.$

3) $g \div f = \frac{x^2 - x - 12}{3x - 12}$, où $x \neq 4$
$= \frac{1}{3}x + 1$ (obtenu par la division de polynômes).

4) $f \circ g = 3(x^2 - x - 12) - 12$
$= 3x^2 - 3x - 36 - 12$
$= 3x^2 - 3x - 48.$

5) $f \circ h = 3\left(3\sqrt{2x+1} + 5\right) - 12$
$= 9\sqrt{2x+1} + 15 - 12$
$= 9\sqrt{2x+1} + 3.$

6) $h \circ f = 3\sqrt{2(3x-12)+1} + 5$
$= 3\sqrt{6x - 24 + 1} + 5$
$= 3\sqrt{6x - 23} + 5.$

7) $f \circ p = 3\left({}^{-}2\left|x - 5\right| + 1\right) - 12$
$= {}^{-}6\left|x - 5\right| + 3 - 12$
$= {}^{-}6\left|x - 5\right| - 9.$

8) $p \circ f = {}^{-}2\left|(3x - 12) - 5\right| + 1$
$= {}^{-}2\left|3x - 17\right| + 1$
$= {}^{-}2\left|3\left(x - \frac{17}{3}\right)\right| + 1.$

b) 1) Domaine de $f + g$: $\mathbb{R}$.

2) Domaine de $g - f$: $\mathbb{R}$.

3) Domaine de $g \div f$: $\mathbb{R}\ \{4\}$.

4) Domaine de $f \circ h$: $\mathbb{R}$.

5) $(f \circ h)(x) = 9\sqrt{2x+1} + 3$
$= 9\sqrt{2\left(x + \frac{1}{2}\right)} + 3$

Domaine de $f \circ h$: $\left[-\frac{1}{2}, {}^{+}\infty\right[$.

CORRIGÉ, p. 157 (*suite*)

6) $(h \circ f)(x) = 3\sqrt{6x - 23} + 5$

$= 3\sqrt{6\left(x - \dfrac{23}{6}\right)} + 5$

Domaine de $h \circ f$: $\left[\dfrac{23}{6}, {}^{+}\infty\right[$.

7) Domaine de $f \circ p$: $\mathbb{R}$.

8) Domaine de $p \circ f$: $\mathbb{R}$.

Corrigé, p. 158

Exercices (*suite*)

11. **a)** $F(x) = (j \circ h)(x) = j(h(x)) = j({}^{-}x) = ({}^{-}x)^2$.

b) $F(x) = (j \circ g)(x) = j(g(x)) = j\left(\left[x\right]\right) = \left(\left[x\right]\right)^2$.

c) $F(x) = (j \circ f)(x) = j(f(x)) = j\left(\sqrt{x}\right) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$

ou $F(x) = (f \circ j)(x) = f(j(x)) = f(x^2) = \sqrt{(x^2)} = x$.

d) $F(x) = (h \circ j)(x) = h(j(x)) = h(x^2) = {}^{-}x^2$.

e) $F(x) = (k \circ h)(x) = k(h(x)) = k({}^{-}x) = \left|{}^{-}x\right|$.

f) $F(x) = (k \circ g)(x) = k(g(x)) = k\left(\left[x\right]\right) = \left|\left[x\right]\right|$.

g) $F(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x}\right) = \left[\sqrt{x}\right]$.

h) $F(x) = (g \circ k)(x) = g(k(x)) = g\left(|x|\right) = \left[|x|\right]$.

i) $F(x) = (h \circ k)(x) = h(k(x)) = h\left(|x|\right) = {}^{-}|x|$.

12. **a)** $g(x) \circ f(x) = \dfrac{3\sqrt{4 - x^2} + 1}{4 - \dfrac{9}{2}\sqrt{4 - x^2}}$, où $\sqrt{4 - x^2} \neq \dfrac{8}{9}$.

$g(x) \circ f(x) = g\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}\right)$

$= \dfrac{2\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}\right) + 1}{4 - 3\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{4 - x^2}\right)}$.

b) $g^{-1}(x) = \dfrac{{}^{-}4x + 1}{{}^{-}3x - 2}$, où $x \neq {}^{-}\dfrac{2}{3}$.

$x = \dfrac{2y + 1}{4 - 3y}$

$4x - 3xy = 2y + 1$

$y({}^{-}3x - 2) = {}^{-}4x + 1$.

c) $g(x) \circ g^{-1}(x) = x$, si $x \neq {}^{-}\dfrac{2}{3}$.

$g(x) \circ g^{-1}(x) = g\left(\dfrac{{}^{-}4x + 1}{{}^{-}3x - 2}\right)$

$= \dfrac{2\left(\dfrac{{}^{-}4x + 1}{{}^{-}3x - 2}\right) + 1}{4 - 3\left(\dfrac{{}^{-}4x + 1}{{}^{-}3x - 2}\right)}$

$= \dfrac{\dfrac{{}^{-}8x + 2}{{}^{-}3x - 2} + \dfrac{{}^{-}3x - 2}{{}^{-}3x - 2}}{\dfrac{4({}^{-}3x - 2)}{{}^{-}3x - 2} + \dfrac{12x - 3}{{}^{-}3x - 2}}$

$= \dfrac{\dfrac{{}^{-}11x}{{}^{-}3x - 2}}{\dfrac{{}^{-}12x - 8 + 12x - 3}{{}^{-}3x - 2}}$

$$= \frac{\dfrac{^-11x}{^-3x - 2}}{\dfrac{^-11}{^-3x - 2}}$$

$$= \frac{^-11x}{^-3x - 2} \cdot \frac{^-3x - 2}{^-11}, \text{ où } x \neq {^-}\frac{2}{3}.$$

CORRIGÉ, p. 159

Exercices (*suite*)

13. a) $(f \circ j)(x)$.

En effet, $f\left(3\left|2x - 3\right| + 1\right) = 2\left(3\left|2x - 3\right| + 1\right) - 12$

$= 6\left|2x - 3\right| + 2 - 12$

$= 6\left|2x - 3\right| - 10.$

b) $(f \circ h)(x)$.

En effet, $f\left(^-2\sqrt{x - 7} + 5\right) = 2\left(^-2\sqrt{x - 7} + 5\right) - 12$

$= {^-4}\sqrt{x - 7} + 10 - 12$

$= {^-4}\sqrt{x - 7} - 2.$

c) $(f \circ g)(x)$.

En effet, $f(x^2 - 7x + 6) = 2(x^2 - 7x + 6) - 12$

$= 2x^2 - 14x + 12 - 12$

$= 2x^2 - 14x.$

d) $(g \div f)(x)$.

En effet, $\dfrac{x^2 - 7x + 6}{2x - 12} = \dfrac{x - 1}{2}$ (obtenu par la division de polynômes).

e) $(g - f)(x)$.

En effet, $(x^2 - 7x + 6) - (2x - 12) = x^2 - 7x + 6 - 2x + 12$

$= x^2 - 9x + 18.$

f) $(j \circ f)(x)$.

En effet, $j(2x - 12) = 3\left|2(2x - 12) - 3\right| + 1$

$= 3\left|4x - 24 - 3\right| + 1$

$= 3\left|4x - 27\right| + 1.$

g) $(g + f)(x)$ ou $(f + g)(x)$.

En effet, $(x^2 - 7x + 6) + (2x - 12) = x^2 - 5x - 6.$

h) $(h \circ f)(x)$.

En effet, $h(2x - 12) = {^-2}\sqrt{(2x - 12) - 7} + 5$

$= {^-2}\sqrt{2x - 19} + 5.$

14. a) 3).

b) 2).

c) 4).

d) 1).

Exercices (*suite*)

15. a) $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x+3}{x+4}$

$=\dfrac{(x+1)(x+4)+(x+3)(x+2)}{(x+2)(x+4)}$

$=\dfrac{x^2+5x+4+x^2+5x+6}{(x+2)(x+4)}$

$=\dfrac{2x^2+10x+10}{(x+2)(x+4)}$

$=\dfrac{2(x^2+5x+5)}{(x+2)(x+4)}$, où $x \neq {}^-2$ et $x \neq {}^-4$.

b) $\dfrac{2x+3}{3x-2}-\dfrac{x-1}{5x+4}$

$=\dfrac{(2x+3)(5x+4)-(x-1)(3x-2)}{(3x-2)(5x+4)}$

$=\dfrac{10x^2+23x+12-(3x^2-5x+2)}{(3x-2)(5x+4)}$

$=\dfrac{7x^2+28x+10}{(3x-2)(5x+4)}$, où $x \neq \dfrac{2}{3}$ et $x \neq -\dfrac{4}{5}$.

c) $\left(\dfrac{5x-1}{3x+4}\right)\left(\dfrac{10x-3}{4x+7}\right)=\dfrac{50x^2-25x+3}{12x^2+37x+28}$, où $x \neq -\dfrac{4}{3}$ et $x \neq -\dfrac{7}{4}$.

d) $\dfrac{x^2-4}{x+2}\div\dfrac{x-2}{2}$

$=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2}\div\dfrac{x-2}{2}$

$=(x-2)\times\dfrac{2}{x-2}$

$=2$, où $x \neq {}^-2$ et $x \neq 2$.

e) $\dfrac{x+2}{x^2+4x+4}-\dfrac{x+3}{x^2+4x+3}$

$=\dfrac{x+2}{(x+2)(x+2)}-\dfrac{x+3}{(x+1)(x+3)}$

$=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+1}$

$=\dfrac{(x+1)-(x+2)}{(x+2)(x+1)}$

$=\dfrac{{}^-1}{(x+2)(x+1)}$, où $x \neq {}^-2$, $x \neq {}^-3$ et $x \neq {}^-1$.

f) $\dfrac{x+3}{x^2+5x+6}+\dfrac{12}{x^2+9x+14}$

$=\dfrac{x+3}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{12}{(x+2)(x+7)}$

$=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{12}{(x+2)(x+7)}$

$=\dfrac{(x+7)+12}{(x+2)(x+7)}$

$=\dfrac{x+19}{(x+2)(x+7)}$, où $x \neq {}^-2$, $x \neq {}^-3$ et $x \neq {}^-7$.

g) $\left(\dfrac{2x^2+7x-15}{x+5}\right)\left(\dfrac{3x+3}{9x^2-9}\right)$

$= \left(\dfrac{2x^2-3x+10x-15}{x+5}\right)\left(\dfrac{3(x+1)}{9(x^2-1)}\right)$

$= \left(\dfrac{x(2x-3)+5(2x-3)}{x+5}\right)\left(\dfrac{(x+1)}{3(x+1)(x-1)}\right)$

$= \left(\dfrac{(2x-3)(x+5)}{x+5}\right)\left(\dfrac{1}{3(x-1)}\right)$

$= \dfrac{(2x-3)}{3(x-1)}$, où $x \neq 1$, $x \neq {}^-1$, $x \neq {}^-5$.

h) $\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+13x+20} \div \dfrac{2x^2+7x+6}{x^2+7x+12}$

$= \dfrac{(x+1)(x+2)}{2x^2+5x+8x+20} \div \dfrac{2x^2+3x+4x+6}{(x+3)(x+4)}$

$= \dfrac{(x+1)(x+2)}{x(2x+5)+4(2x+5)} \div \dfrac{x(2x+3)+2(2x+3)}{(x+3)(x+4)}$

$= \dfrac{(x+1)(x+2)}{(2x+5)(x+4)} \div \dfrac{(2x+3)(x+2)}{(x+3)(x+4)}$

$= \dfrac{(x+1)(x+2)}{(2x+5)(x+4)} \times \dfrac{(x+3)(x+4)}{(2x+3)(x+2)}$

$= \dfrac{(x+1)(x+3)}{(2x+5)(2x+3)}$, où $x \neq -\dfrac{5}{2}$, $x \neq -\dfrac{3}{2}$, $x \neq {}^-2$, $x \neq {}^-3$ et $x \neq {}^-4$.

16. a) $\dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-3}$

$= \dfrac{(x-3)+(x+2)}{(x+2)(x-3)}$

$= \dfrac{2x-1}{(x+2)(x-3)}$, où $x \neq {}^-2$ et $x \neq 3$.

b) $\dfrac{3}{x-4} - \dfrac{2}{2x+3}$

$= \dfrac{3(2x+3)-2(x-4)}{(x-4)(2x+3)}$

$= \dfrac{6x+9-2x+8}{(x-4)(2x+3)}$

$= \dfrac{4x+17}{(x-4)(2x+3)}$, où $x \neq 4$ et $x \neq -\dfrac{3}{2}$.

c) $\dfrac{2}{x+5} + \dfrac{1}{x^2+10x+25}$

$= \dfrac{2}{x+5} + \dfrac{1}{(x+5)^2}$

$= \dfrac{2(x+5)+1}{(x+5)^2}$

$= \dfrac{2x+10+1}{(x+5)^2}$

$= \dfrac{2x+11}{(x+5)^2}$, où $x \neq {}^-5$.

d) $\dfrac{3x}{x^2-4}-\dfrac{5}{x^2+x-6}$

$=\dfrac{3x}{(x+2)(x-2)}-\dfrac{5}{(x-2)(x+3)}$

$=\dfrac{3x(x+3)-5(x+2)}{(x+2)(x-2)(x+3)}$

$=\dfrac{3x^2+9x-5x-10}{(x+2)(x-2)(x+3)}$

$=\dfrac{3x^2+4x-10}{(x+2)(x-2)(x+3)}$, où $x\neq{}^-2$, $x\neq 2$ et $x\neq{}^-3$.

e) $\dfrac{2x-1}{2x+7}+\dfrac{x}{6x+21}$

$=\dfrac{2x-1}{2x+7}+\dfrac{x}{3(2x+7)}$

$=\dfrac{3(2x-1)+x}{3(2x+7)}$

$=\dfrac{6x-3+x}{3(2x+7)}$

$=\dfrac{7x-3}{3(2x+7)}$, où $x\neq-\dfrac{7}{2}$.

f) $\dfrac{x-1}{3x+4}\cdot\dfrac{x-5}{{}^-4x+4}$

$=\dfrac{x-1}{3x+4}\cdot\dfrac{x-5}{{}^-4(x-1)}$

$=-\dfrac{(x-5)}{4(3x+4)}$, où $x\neq 1$ et $x\neq-\dfrac{4}{3}$.

g) $\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-4}\cdot\dfrac{x^2-7x+10}{x^2+x}$

$=\dfrac{(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+2)}\cdot\dfrac{(x-5)(x-2)}{x(x+1)}$

$=\dfrac{(x-5)}{x}$, où $x\neq 2$, $x\neq{}^-2$, $x\neq{}^-1$ et $x\neq 0$.

h) $\dfrac{x^2+3x}{x^3+2x^2+x}\div\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$

$=\dfrac{x(x+3)}{x(x^2+2x+1)}\div\dfrac{x-1}{x^2+2x-3}$

$=\dfrac{x(x+3)}{x(x+1)^2}\div\dfrac{x-1}{(x-1)(x+3)}$

$=\dfrac{x+3}{(x+1)^2}\div\dfrac{1}{x+3}$

$=\dfrac{x+3}{(x+1)^2}\times(x+3)$

$=\dfrac{(x+3)^2}{(x+1)^2}$, où $x\neq 0$, $x\neq{}^-1$, $x\neq 1$ et $x\neq{}^-3$.

i) $\dfrac{x+4}{6x^2+7x-5}\cdot\dfrac{4x^2-4x+1}{3x+5}$

$=\dfrac{x+4}{6x^2-3x+10x-5}\cdot\dfrac{4x^2-2x-2x+1}{3x+5}$

$=\dfrac{x+4}{3x(2x-1)+5(2x-1)}\cdot\dfrac{2x(2x-1)-1(2x-1)}{3x+5}$

$=\dfrac{x+4}{(2x-1)(3x+5)}\cdot\dfrac{(2x-1)^2}{3x+5}$

$=\dfrac{(x+4)(2x-1)}{(3x+5)^2}$, où $x\neq\dfrac{1}{2}$ et $x\neq-\dfrac{5}{3}$.

17. a) $f^{-1}(x) = \dfrac{4x-3}{2}$, car

$$x = \frac{2y+3}{4}$$
$$4x = 2y+3$$
$$2y = 4x-3$$
$$y = \frac{4x-3}{2}.$$

On a bien

$$f \circ f^{-1} = \frac{2\left(\dfrac{4x-3}{2}\right)+3}{4} = \frac{4x-3+3}{4} = \frac{4x}{4} = x$$

$$\text{et } f^{-1} \circ f = \frac{4\left(\dfrac{2x+3}{4}\right)-3}{2} = \frac{2x+3-3}{2} = \frac{2x}{2} = x.$$

b) $f^{-1}(x) = \dfrac{3x+1}{4}$, car

$$x = \frac{4y-1}{3}$$
$$3x = 4y-1$$
$$4y = 3x+1$$
$$y = \frac{3x+1}{4}.$$

On a bien

$$f \circ f^{-1} = \frac{4\left(\dfrac{3x+1}{4}\right)-1}{3} = \frac{3x+1-1}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

$$\text{et } f^{-1} \circ f = \frac{3\left(\dfrac{4x-1}{3}\right)+1}{4} = \frac{4x-1+1}{4} = \frac{4x}{4} = x.$$

c) $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2-2x-17}{9}$, où $x \geq 1$, car

$$x = 3\sqrt{y+2}+1, \text{ où } y \geq {}^-2$$
$$\frac{x-1}{3} = \sqrt{y+2}$$
$$\left(\frac{x-1}{3}\right)^2 = \left(\sqrt{y+2}\right)^2$$
$$\frac{x^2}{9} - \frac{2x}{9} + \frac{1}{9} = y+2$$
$$y = \frac{x^2-2x-17}{9}, \text{ où } x \geq 1.$$

On a bien

$$f \circ f^{-1} = 3\sqrt{\left(\frac{x^2-2x-17}{9}\right)+2}+1 = 3\sqrt{\frac{x^2-2x+1}{9}}+1 = 3\sqrt{\frac{(x-1)^2}{9}}+1$$
$$= 3\frac{(x-1)}{3}+1 = x-1+1 = x$$

$$\text{et } f^{-1} \circ f = \frac{\left(3\sqrt{x+2}+1\right)^2 - 2\left(3\sqrt{x+2}+1\right) - 17}{9}$$
$$= \frac{9(x+2)+6\sqrt{x+2}+1-6\sqrt{x+2}-2-17}{9} = \frac{9(x+2)-18}{9} = x+2-2 = x.$$

d) $f^{-1}(x) = \frac{4x+1}{3x-1}$, où $x \neq \frac{1}{3}$, car

$$x = \frac{y+1}{3y-4}, \text{ où } y \neq \frac{4}{3}$$

$$3xy - 4x = y + 1$$

$$3xy - y = 1 + 4x$$

$$y(3x-1) = 1 + 4x$$

$$y = \frac{4x+1}{3x-1}, \text{ où } x \neq \frac{1}{3}.$$

On a bien

$$f \circ f^{-1} = \frac{\frac{4x+1}{3x-1}+1}{3\left(\frac{4x+1}{3x-1}\right)-4} = \frac{\frac{4x+1+3x-1}{3x-1}}{\frac{12x+3-4(3x-1)}{3x-1}} = \frac{\frac{7x}{3x-1}}{\frac{12x+3-12x+4}{3x-1}}$$

$$= \frac{\frac{7x}{3x-1}}{\frac{7}{3x-1}} = \frac{7x}{3x-1} \cdot \frac{3x-1}{7} = x$$

$$\text{et } f^{-1} \circ f = \frac{4\left(\frac{x+1}{3x-4}\right)+1}{3\left(\frac{x+1}{3x-4}\right)-1} = \frac{\frac{4x+4+3x-4}{3x-4}}{\frac{3x+3-(3x-4)}{3x-4}} = \frac{\frac{7x}{3x-4}}{\frac{7}{3x-4}} = \frac{7x}{3x-4} \cdot \frac{3x-4}{7} = x.$$

18. a) 1) $g(x) = {}^{-}2x - 2$.

Démarche :

$(3x+2) + ax + b = x$

$3x + ax = x$ et $2 + b = 0$

$ax = {}^{-}2x$ $\quad b = {}^{-}2$.

$a = {}^{-}2$

2) $g(x) = 4x + \frac{7}{3}$.

Démarche :

$ax + b - (3x+2) = x + \frac{1}{3}$

$ax - 3x = x$ et $b - 2 = \frac{1}{3}$

$ax = 4x$ $\quad b = \frac{7}{3}$.

$a = 4$

3) $g(x) = 2x - 5$.

Démarche :

$$(3x+2) \cdot (ax+b) = 6x^2 - 11x - 10$$

$$3ax^2 + 3bx + 2ax + 2b = 6x^2 - 11x - 10$$

$$3ax^2 + (3b+2a)x + 2b = 6x^2 - 11x - 10$$

$3a = 6$ et $3b + 2a = {}^{-}11$ et $2b = {}^{-}10$

$a = 2$ $\quad 3b + 2 \cdot 2 = {}^{-}11$ $\quad b = {}^{-}5$.

$3b = {}^{-}15$

$b = {}^{-}5$

4) $g(x) = \frac{x-2}{3}$.

Démarche :

$3(ax+b) + 2 = x$ et $a(3x+2) + b = x$

$3ax + 3b + 2 = x$ $\quad 3ax + 2a + b = x$

$3a = 1$ et $3b + 2 = 1$ $\quad 3a = 1$ et $2a + b = 0$

$a = \frac{1}{3}$ $\quad b = -\frac{2}{3}$ $\quad a = \frac{1}{3}$ $\quad 2\left(\frac{1}{3}\right) + b = 0$

$b = -\frac{2}{3}$.

CORRIGÉ, p. 160 (*suite*)

5) $g(x) = 27x + 26.$

Démarche :

$$3\big(3(3x+2)+2\big)+2 = ax+b$$
$$3(9x+6+2)+2 = ax+b$$
$$3(9x+8)+2 = ax+b$$
$$27x+24+2 = ax+b$$
$$27x+26 = ax+b$$

$a = 27$ et $b = 26.$

6) $g(x) = x + 3.$

Démarche :

$$\text{Si } (f \div g)(x) = \frac{^{-}7}{x+3} + 3, \text{ alors } \left(\frac{^{-}7}{x+3} + 3\right) \cdot g(x) = f(x)$$
$$\left(\frac{^{-}7}{x+3} + 3\right) \cdot (ax+b) = 3x+2$$
$$\frac{^{-}7ax}{x+3} - \frac{7b}{x+3} + 3ax + 3b = 3x+2$$
$$\frac{^{-}7ax - 7b}{x+3} + 3ax + 3b = 3x+2$$
$$^{-}7ax - 7b + 3ax(x+3) + 3b(x+3) = (3x+2)(x+3)$$
$$^{-}7ax - 7b + 3ax^2 + 9ax + 3bx + 9b = 3x^2 + 11x + 6$$
$$3ax^2 + (^{-}7a + 9a + 3b)x + (^{-}7b + 9b) = 3x^2 + 11x + 6$$
$$3ax^2 + (2a + 3b)x + (2b) = 3x^2 + 11x + 6$$

$3a = 3$	et	$2a + 3b = 11$	et	$2b = 6$
$a = 1$		$2(1) + 3b = 11$		$b = 3.$
		$3b = 11 - 2$		
		$3b = 9$		
		$b = 3$		

b) En généralisant le résultat obtenu en **a)** 5), on peut conclure que :

$$g(x) = \big(f \circ f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f\big)(x) = 3^n \cdot x + 3^n - 1.$$

En effet,
$$\big(f \circ f \circ f \circ f\big)(x) = 3(3(3(3x+2)+2)+2)+2$$
$$= 3(3(9x+6+2)+2)+2$$
$$= 3(3(9x+8)+2)+2$$
$$= 3(27x+24+2)+2$$
$$= 3(27x+26)+2$$
$$= 81x+78+2$$
$$= 81x+80 = 3^4 \cdot x + 3^4 - 1 = 81x+80.$$

CORRIGÉ, p. 161

Consolidation

1. a) Pour transformer directement en pascals des données exprimées en PSI, il suffit d'appliquer la composition de fonctions suivante :

$p = g \circ f$

$p(x) = g(0{,}0689x)$

$p(x) = 100\,000 \cdot (0{,}0689x)$

$p(x) = 6890x$, où $p(x)$ représente la pression en pascals et x la pression en PSI.

b) On cherche la fonction réciproque de la fonction trouvée en **a)** :

$x = 6890y$

$p^{-1}(x) = \frac{x}{6890}$, où $p^{-1}(x)$ représente la pression en PSI et x la pression en pascals.

c) Pour démontrer que les fonctions trouvées en **a)** et en **b)** sont des fonctions réciproques, on doit vérifier que

$p(x) \circ p^{-1}(x) = p^{-1}(x) \circ p(x) = I(x) = x$:

$p(x) \circ p^{-1}(x) = p\left(\dfrac{x}{6890}\right) = 6890 \cdot \left(\dfrac{x}{6890}\right) = x$

$p^{-1}(x) \circ p(x) = p^{-1}(6890x) = \dfrac{6890x}{6890} = x.$

2. a) $I_A(x) = \dfrac{120}{(x+2)^2}$ pour $x \neq -2$ et $I_B(x) = \dfrac{300}{(x-5)^2}$ pour $x \neq 5$, où I_A et I_B représentent les intensités lumineuses, en candelas,des deux sources de lumière selon la distance, en unités, d'un capteur que l'on place à une position x sur l'axe de nombres.

b) $I_t(x) = I_A + I_B$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{120}{(x+2)^2} + \frac{300}{(x-5)^2} \\
&= \frac{120(x-5)^2 + 300(x+2)^2}{(x+2)^2(x-5)^2} \\
&= \frac{120(x^2 - 10x + 25) + 300(x^2 + 4x + 4)}{(x+2)^2(x-5)^2} \\
&= \frac{120x^2 - 1200x + 3000 + 300x^2 + 1200x + 1200}{(x+2)^2(x-5)^2} \\
&= \frac{420x^2 + 4200}{(x+2)^2(x-5)^2}
\end{aligned}
$$

$I_t(x) = \dfrac{420(x^2 + 10)}{(x+2)^2(x-5)^2}$ pour $x \neq -2$ et $x \neq 5$.

CORRIGÉ, p. 162

Consolidation (*suite*)

3. a) Les revenus de la compagnie sont les plus élevés au cours de la 26e semaine de l'année, donc durant le mois de juin. En effet, les revenus sont exprimés selon une fonction représentée par une parabole ayant une ouverture vers le bas et un sommet situé au point (26, 15). Cette fonction atteint donc son maximum (15 000 $) à la 26e semaine.

Les dépenses de la compagnie sont les plus élevées au cours de la 1re semaine et de la 52e semaine de l'année, donc durant les mois de janvier et de décembre. En effet, les dépenses sont exprimées selon une fonction représentée par une parabole ayant une ouverture vers le bas et un sommet situé au point (26, 5). Puisque le domaine de cette fonction est restreint en raison du contexte ([0, 52]), celle-ci atteint donc son maximum (9 000 $) au départ et à la 52e semaine.

b) Nous savons que les profits se calculent en soustrayant les dépenses des revenus. Donc $R(1) - D(1) =$ profits pour la première semaine de l'année.

$$
\begin{aligned}
R(1) &= -\frac{1}{52}(1-26)^2 + 15 \\
&= -\frac{1}{52} \cdot 625 + 15 \\
&\approx 2{,}98077 \text{ (les revenus sont donc de 2980,77 \$).}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
D(1) &= \frac{1}{169}\left(1-26\right)^2 + 5 \\
&= \frac{1}{169} \cdot 625 + 5 \\
&\approx 8{,}69822 \text{ (les dépenses sont donc de 8698,22 \$).}
\end{aligned}
$$

$R(1) - D(1) = 2980{,}77 - 8698{,}22\,s - 5717{,}46$ $.

À la première semaine de l'année, la compagnie ne fait donc pas de profits, mais subit des pertes de 5717,46 $.

c) $P(s) = R(s) - D(s)$

$$= {}^{-}\frac{1}{52}(s-26)^2 + 15 - \left(\frac{1}{169}(s-26)^2 + 5\right)$$

$$= {}^{-}\frac{1}{52}(s^2 - 52s + 676) + 15 - \left(\frac{1}{169}(s^2 - 52s + 676) + 5\right)$$

$$= {}^{-}\frac{s^2}{52} + s - 13 + 15 - \left(\frac{s^2}{169} - \frac{4s}{13} + 4 + 5\right)$$

$$= {}^{-}\frac{17s^2}{676} + \frac{17s}{13} - 7$$

$$= {}^{-}\frac{17}{676}\left(s^2 - 52s + \frac{4732}{17}\right)$$

$$= {}^{-}\frac{17}{676}\left(s^2 - 52s + 676 - 676 + \frac{4732}{17}\right)$$

$$P(s) = {}^{-}\frac{17}{676}(s-26)^2 + 10.$$

d) 225 115,38 \$. Pour déterminer le profit annuel de la compagnie, il faut additionner les profits de toutes les semaines de l'année.

$P_{\text{annuel}} = P(1) + P(2) + P(3) + \ldots + P(51) + P(52)$

$P_{\text{annuel}} = {}^{-}5{,}7175 + {}^{-}4{,}4852 + {}^{-}3{,}3033 + \ldots + {}^{-}5{,}7175 + {}^{-}7$

$P_{\text{annuel}} = 225{,}11538$, soit 225 115,38 \$.

Ce calcul est plutôt long à faire puisqu'il consiste à appliquer 52 fois la formule trouvée en **c)**.

Les élèves pourraient aussi chercher sur Internet, ou tenter de découvrir par eux-mêmes et elles-mêmes des formules pouvant simplifier leurs calculs. Par exemple, la somme des entiers de 1 à n est donnée par $\frac{n(n+1)}{2}$ et la somme des carrés des entiers de 1 à n est donnée par $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Puisque les profits de chaque semaine sont donnés par :

$${}^{-}\frac{17}{676}(s-26)^2 + 10 = {}^{-}\frac{17}{676}s^2 + \frac{17}{13}s - 7,$$

les profits annuels sont donnés par la somme suivante :

$$\sum_{s=1}^{52}\left({}^{-}\frac{17}{676}s^2 + \frac{17}{13}s - 7\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{52}\left({}^{-}\frac{17}{676}s^2\right) + \sum_{s=1}^{52}\left(\frac{17}{13}s\right) + 52({}^{-}7)$$

$$= \frac{-17}{676}\sum_{s=1}^{52}s^2 + \frac{17}{13}\sum_{s=1}^{52}s + 52({}^{-}7)$$

$$= {}^{-}\frac{17}{676}\left(\frac{52(52+1)(2\cdot 52+1)}{6}\right) + \frac{17}{13}\left(\frac{52(52+1)}{2}\right) - 364$$

$$= {}^{-}\frac{17}{676}\cdot 48\,230 + \frac{17}{13}\cdot 1378 - 364$$

$$= {}^{-}1212{,}88462 + 1802 - 364$$

$= 225{,}11538$, soit 225 115,38 \$ de profit annuel.

4. a) Pour exprimer la tension électrique V en fonction du temps écoulé, on doit effectuer la composition de fonctions suivante : $V \circ Q$,

$$V = \frac{E_j}{Q} = \frac{E_J}{I \cdot t}.$$

Selon cette dernière équation, on peut dire que la tension électrique V varie de façon inversement proportionnelle au temps écoulé t. En d'autres mots, plus le temps augmente, plus la tension diminue.

Cette relation est représentée par une fonction rationnelle.

b) Puisque l'électron-volt $= 1{,}6 \times 10^{-19}$ joules, il suffit de multiplier le nombre d'électrons-volts par $1{,}6 \times 10^{-19}$ pour les convertir en joules.

On peut donc déduire que $V(t) = \frac{(1{,}6 \times 10^{-19}) \cdot E_{eV}}{I \cdot t}$,

qui détermine la tension électrique en volts, en fonction du temps écoulé en secondes, si l'on connaît l'intensité du courant I en coulombs, et l'énergie électrique E_{eV} en électrons-volts.

CORRIGÉ, p. 162 (*suite*)

c) On sait que $t = 10$, $I = 0{,}25$ et que $E_{eV} = 1{,}5 \times 10^{20}$.

On peut calculer la tension électrique en utilisant la fonction trouvée en **b)** :

$$V(t) = \frac{(1{,}6 \times 10^{-19}) \cdot E_{eV}}{I \cdot t} = \frac{(1{,}6 \times 10^{-19}) \cdot 1{,}5 \times 10^{20}}{0{,}25 \cdot 10} = \frac{24}{2{,}5} = 9{,}6 \text{ volts.}$$

CORRIGÉ, p. 163

Consolidation (*suite*)

5. a) $V_G(t) = V_{étudiant}(t) + V_{train}(t)$

$= (3 + 0{,}1t) + (10 + 0{,}2t)$

$V_G(t) = 13 + 0{,}3t.$

b) $V_G - 13 = 0{,}3t$

$$t = \frac{V_G - 13}{0{,}3}$$

$$t(V_G) = \frac{10 \cdot V_G - 130}{3}.$$

c) $$\bar{V} = \frac{3 + \left(13 + 0{,}3t\right)}{2}$$

$$= \frac{16 + 0{,}3t}{2}$$

$\bar{V} = 8 + 0{,}15t.$

d) $V_G = 30$ m/s

$$t(V_G) = \frac{10 \cdot 30 - 130}{3} = \frac{170}{3} = 56{,}\bar{6} \text{ secondes.}$$

$\bar{V} = 8 + 0{,}15(56{,}\bar{6}) = 8 + 8{,}4\bar{9} = 16{,}5$ m/s

À une vitesse moyenne de 16,5 m/s durant $56{,}\bar{6}$ secondes, l'étudiant a parcouru une distance de $16{,}5 \times 56{,}\bar{6} = 935$ mètres.

CORRIGÉ, p. 164

Consolidation (*suite*)

6. a) Soit $d_3 = 50t$, la distance parcourue (en kilomètres) à une vitesse constante. On sait que la distance totale d_T parcourue par un autobus en fonction du temps total en heures est :

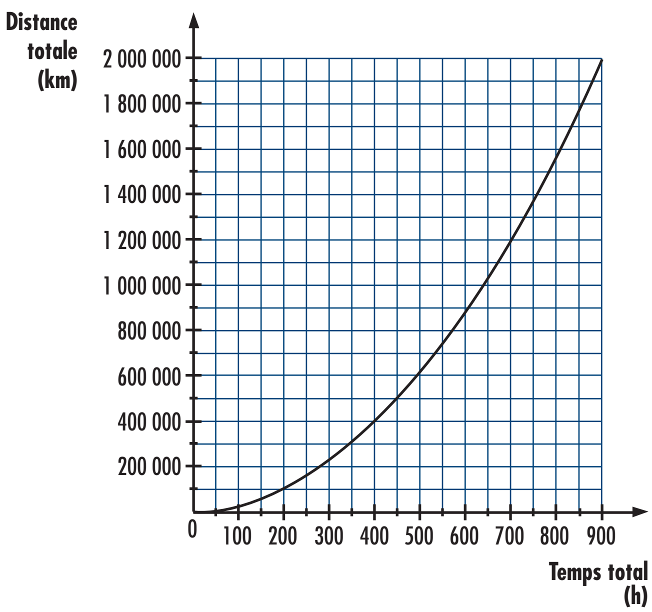
$d_T(t) = d_1 + d_2 + d_3$

$d_T = \left(125(0{,}16t)^2\right) + \left(0{,}04t - 500(0{,}04t)^2\right) + 50(0{,}8t)$

$d_T = 3{,}2t^2 + 0{,}04t - 0{,}8t^2 + 40t$

$d_T = 2{,}4t^2 + 40{,}04t.$

Voici le graphique de cette fonction :



CORRIGÉ, p. 164 (*suite*)

b) On commence par exprimer le temps (en heures) que met un autobus à franchir un parcours en fonction de la distance (en kilomètres), sans prendre en considération les temps d'arrêt.

On doit isoler t dans l'équation trouvée en **a)** :

$$d_T = 2{,}4t^2 + 40{,}04t$$

$$d = 2{,}4\left(t^2 + \frac{1001}{60}t + \frac{1\,002\,001}{14\,400}\right) - 2{,}4\left(\frac{1\,002\,001}{14\,400}\right)$$

$$d = 2{,}4\left(t + \frac{1001}{120}\right)^2 - 167$$

$$\frac{d + 167}{2{,}4} = \left(t + 8{,}3417\right)^2$$

$$\pm\sqrt{0{,}417 \cdot d + 69{,}583} = \sqrt{\left(t + 8{,}3417\right)^2}$$

$$t = {}^-8{,}3417 \pm \sqrt{0{,}417 \cdot d + 69{,}583}.$$

Le signe ($^-$) devant la racine carrée peut être enlevé puisque le temps doit être une donnée positive.

$t = {}^-8{,}3417 + \sqrt{0{,}417 \cdot d + 69{,}583}.$

On sait que le temps d'arrêt moyen d'un autobus est de 1 minute et 30 secondes par kilomètre parcouru (1,5 minute $= 1{,}5 \div 60 = 0{,}025$ heure).

Donc, $t_{arrêt} = 0{,}025d$, où t est en heures et d est en kilomètres.

Finalement, on obtient $t_{total} = t_{arrêt} + t$

$t_{total} = 0{,}025d + \sqrt{0{,}417 \cdot d + 69{,}583} - 8{,}3417.$

Pour évaluer le temps que mettrait un autobus pour effectuer un parcours de 22 km, il suffit de remplacer d par 22 dans l'équation précédente et trouver la valeur de t:

$t_{total} = 0{,}025(22) + \sqrt{0{,}417 \cdot 22 + 69{,}583} - 8{,}3417$

$t_{total} = 0{,}55 + \sqrt{9{,}174 + 69{,}583} - 8{,}3417$

$t_{total} = 0{,}55 + \sqrt{78{,}757} - 8{,}3417$

$t_{total} \approx 0{,}55 + 8{,}8745 - 8{,}3417$

$t_{total} \approx 1{,}0828.$

Donc, un autobus mettrait 1,0828 heure, soit environ 1 heure et 5 minutes, pour effectuer un trajet de 22 km.

CORRIGÉ, p. 165

Défi

7. a) Lorsque x varie entre h_i et h_{i+1}, on a

1) un «S» allongé allant de $^+\infty$ à $^-\infty$, si $a_i > 0$ et $a_{i+1} > 0$;

2) un «S» allongé inversé allant de $^-\infty$ à $^+\infty$, si $a_i < 0$ et $a_{i+1} < 0$;

3) un «U» allongé allant de $^+\infty$ à $^+\infty$, si $a_i > 0$ et $a_{i+1} < 0$;

4) un «U» allongé inversé allant de $^-\infty$ à $^-\infty$, si $a_i < 0$ et $a_{i+1} > 0$.

En effet, prouvons **3)**. Supposons que $h_i < x < h_{i+1}$. Lorsque x s'approche de plus en plus de h_i par la droite, alors $x - h_i$ est positif et de plus en plus près de 0. Ainsi, puisque $a_i > 0$, $\dfrac{a_{i+1}}{x - h_i}$ devient de plus en plus grand et positif. Les autres termes de la fonction $g(x)$ bougent très peu et restent relativement petits ; donc $g(x)$ s'approche de $^+\infty$. Lorsque x s'approche de plus en plus de h_{i+1} par la gauche, alors $x - h_{i+1}$ est négatif et de plus en plus près de 0. Ainsi, puisque $a_{i+1} < 0$, $\dfrac{a_{i+1}}{x - h_{i+1}}$ devient de plus en plus grand et positif. Encore une fois, les autres termes de la fonction $g(x)$ bougent très peu et restent relativement petits; donc $g(x)$ s'approche de $^+\infty$.

Les autres cas, **1)**, **2)** et **4)**, s'établissent de façon semblable.

b) Oui. Plusieurs exemples sont possibles. Par exemple, la fonction $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-3}$ possède un «S» entre 1 et 3.

Par essais et erreurs, on trouve qu'en lui additionnant la fonction $\dfrac{^-25}{x-4}$, on obtient $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{25}{x-4}$ dont le graphique possède un «S» prononcé (voir figure 4).

CORRIGÉ, p. 165 (*suite*)

c) Oui. Encore une fois, plusieurs exemples sont possibles. Par exemple, la fonction $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$ possède un «U» normal entre $^-1$ et 1. Par essais et erreurs, on trouve qu'en lui additionnant la fonction $\frac{^-30}{x+2} + \frac{30}{x-2}$, on obtient la fonction $\frac{^-30}{x+2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{30}{x-2}$ dont le graphique possède un «W» entre $^-1$ et 1(voir figure 5).

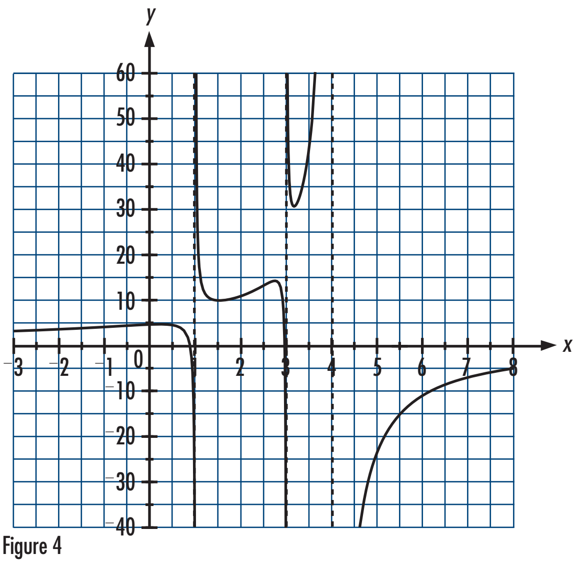


Figure 4

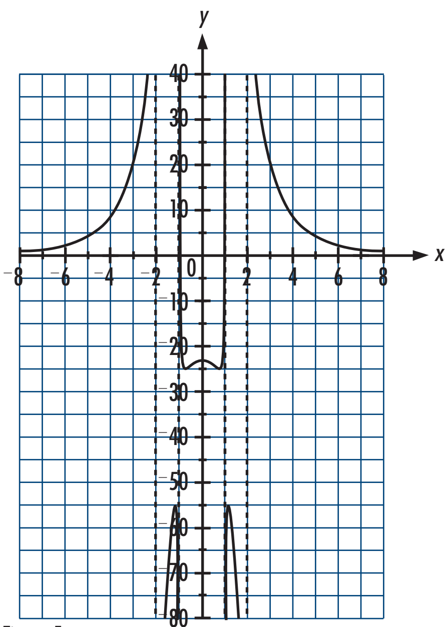


Figure 5

CORRIGÉ, p. 166

Autoévaluation

1. a) 4).

b) 1).

c) 3).

d) 2).

2. a) 1) $h(x) = (f+g)(x) = \frac{1}{x+5} + 3 + \frac{x+1}{x-2}$

$$= \frac{(x-2) + 3(x+5)(x-2) + (x+5)(x+1)}{(x+5)(x-2)}$$

$$= \frac{x-2+3(x^2+3x-10)+x^2+6x+5}{(x+5)(x-2)}$$

$$= \frac{x-2+3x^2+9x-30+x^2+6x+5}{(x+5)(x-2)}$$

$$h(x) = \frac{4x^2+16x-27}{(x+5)(x-2)}, \text{ où } x \neq {}^-5 \text{ et } x \neq 2.$$

2) $h(x) = (f - g)(x) = \dfrac{1}{x+5} + 3 - \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

$= \dfrac{(x-2) + 3(x+5)(x-2) - (x+1)(x+5)}{(x+5)(x-2)}$

$= \dfrac{x - 2 + 3(x^2 + 3x - 10) - (x^2 + 6x + 5)}{(x+5)(x-2)}$

$= \dfrac{x - 2 + 3x^2 + 9x - 30 - x^2 - 6x - 5)}{(x+5)(x-2)}$

$h(x) = \dfrac{2x^2 + 4x - 37}{(x+5)(x-2)}$, où $x \neq {}^-5$ et $x \neq 2$.

3) $h(x) = (f \cdot g)(x) = \left(\dfrac{1}{x+5} + 3\right)\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

$= \left(\dfrac{x+1}{(x+5)(x-2)}\right) + \left(\dfrac{3(x+1)}{x-2}\right)$

$= \dfrac{x + 1 + 3(x+1)(x+5)}{(x+5)(x-2)}$

$= \dfrac{x + 1 + 3(x^2 + 6x + 5)}{(x+5)(x-2)}$

$= \dfrac{x + 1 + 3x^2 + 18x + 15}{(x+5)(x-2)}$

$= \dfrac{3x^2 + 19x + 16}{(x+5)(x-2)}$

$= \dfrac{3x^2 + 3x + 16x + 16}{(x+5)(x-2)}$

$= \dfrac{3x(x+1) + 16(x+1)}{(x+5)(x-2)}$

$h(x) = \dfrac{(x+1)(3x+16)}{(x+5)(x-2)}$, où $x \neq {}^-5$ et $x \neq 2$.

4) $h(x) = (f \div g)(x) = \left(\dfrac{1}{x+5} + 3\right) \div \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

$= \left(\dfrac{1 + 3(x+5)}{x+5}\right) \div \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

$= \left(\dfrac{3x+16}{x+5}\right) \div \left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)$

$= \left(\dfrac{3x+16}{x+5}\right) \cdot \left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)$

$= \dfrac{3x^2 - 6x + 16x - 32}{(x+5)(x+1)}$

$= \dfrac{3x^2 + 10x - 32}{(x+5)(x+1)}$

$= \dfrac{3x^2 - 6x + 16x - 32}{(x+5)(x+1)}$

$= \dfrac{3x(x-2) + 16(x-2)}{(x+5)(x+1)}$

$h(x) = \dfrac{(x-2)(3x+16)}{(x+5)(x+1)}$, où $x \neq {}^-5$, $x \neq 2$ et $x \neq {}^-1$.

5) $h(x) = (f \circ g)(x) = \dfrac{1}{\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right) + 5} + 3$

$= \dfrac{1}{\dfrac{x + 1 + 5(x-2)}{x-2}} + 3$

$= \dfrac{x-2}{x + 1 + 5x - 10} + 3$

CORRIGÉ, p. 166 (*suite*)

$$= \frac{x-2}{6x-9} + 3$$
$$= \frac{x-2+3(6x-9)}{3(2x-3)}$$
$$= \frac{x-2+18x-27}{3(2x-3)}$$
$$h(x) = \frac{19x-29}{3(2x-3)}, \text{ où } x \neq \frac{3}{2} \text{ et } x \neq 2.$$

b) Les opérations effectuées en **2)**, **4)** et **5)** ne sont pas commutatives.

CORRIGÉ, p. 167

Autoévaluation (*suite*)

3. Dollar américain : l'institution financière vend 1 \$ américain pour 1,3059 \$ canadien. Cela signifie que pour 1 \$ canadien, l'institution offre $\frac{1}{1,3059}$ \$ américain.

La fonction $f(x)$ représente l'argent américain qu'une personne peut obtenir en fonction du montant d'argent canadien échangé : $f_1(x) = \frac{x}{1,3059}$.

L'institution financière redonne 1,2408 \$ canadien pour 1 \$ américain.

La fonction $g(x)$ représente l'argent canadien qu'une personne peut obtenir en fonction du montant d'argent américain échangé : $g_1(x) = 1,2408x$.

Pour calculer la perte d'argent encourue par une personne qui effectue la conversion de dollars canadiens en dollars américains pour ensuite reconvertir ces derniers en dollars canadiens, on doit effectuer les opérations suivantes :

$P_1(x) = x - (g \circ f)(x)$, où $P_1(x)$ est la perte d'argent canadien et x est le montant d'argent canadien échangé au départ à l'institution financière contre des dollars américains :

$$P_1(x) = x - g(f(x))$$
$$P_1(x) = x - 1,2408(f(x))$$
$$P_1(x) = x - 1,2408\left(\frac{x}{1,3059}\right).$$

Euro : par la même démarche que celle utilisée pour les dollars américains, on peut calculer la perte d'argent encourue par une personne qui effectue la conversion de dollars canadiens en euros pour ensuite reconvertir ces derniers en dollars canadiens par la fonction suivante :

$P_2(x) = x - 1,5849\left(\frac{x}{1,717}\right)$, où $P_2(x)$ est la perte d'argent canadien et x est le montant d'argent canadien échangé au départ à l'institution financière contre des euros. Après réduction, on trouve $P_2(x) = \frac{1321}{17\,170}x$.

On peut également représenter P_1 et P_2 dans le plan cartésien.